Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 1

Quelques questions en vrac

Question 1. Soient a et b réels tels que $a < b$. On considère une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs réelles, telle que $f(a) = f(b)$.

Il existe alors c dans $]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

Question 2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$.

Question 3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le noyau de la matrice A est

$$\text{Ker}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) ; A \times U = 0\}.$$

L'image de la matrice A est

$$\text{Im}(A) = \{A \times U ; U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$$

C'est aussi le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de la matrice A .

Question 4. On considère un polynôme P non nul de $\mathbb{K}[X]$ et un élément α de $\mathbb{K}$.

La multiplicité de α en tant que racine de P est le plus grand des entiers k tels que $(X - \alpha)^k$ divise P .

Caractérisation. La multiplicité de α en tant que racine de P vaut k si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \quad P^{(i)}(\alpha) = 0.$$

Question 5. Considérons l'élément $n = (2, -1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Le plan P est l'orthogonal de la droite $\text{Vect}(n)$.

Notons p la projection orthogonale sur P et q celle sur $\text{Vect}(n)$, de sorte que $p + q = \text{Id}$.

Pour tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, le projeté $q(v)$ est donné par

$$q(v) = \frac{(n|v)}{(n|n)}n = \frac{2x - y + 3z}{14}(2, -1, 3) = \frac{1}{14}(4x - 2y + 6z, -2x + y - 3z, 6x - 3y + 9z).$$

La matrice canoniquement associée à q est donc

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

D'après la relation $p = \text{Id} - q$, la matrice canoniquement associée à p est donc

$$\text{I}_3 - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 13 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un même intervalle I .

La fonction $f \times g$ est alors de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I , avec

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exercice 1. a. Pour dériver par parties, on dérive la fonction $t \mapsto (1-t)^p$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) en $t \mapsto -p(1-t)^{p-1}$ et on primitive la fonction $t \mapsto t^n$ en $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$).

$$\text{I}(n, p) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^p \right]_0^1 + \frac{p}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{p-1} dt = \frac{p}{n+1} \text{I}(n+1, p-1).$$

b. Une possibilité est d'itérer la relation de récurrence

$$I(n, p) = \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} I(n+2, p-2) = \dots = \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} \times \dots \times \frac{1}{n+p} I(n+p, 0)$$

et de calculer directement $I(n+p, 0) = \int_0^1 t^{n+p} dt = 1/(n+p+1)$, ce qui donne

$$I(n, p) = \frac{p(p-1) \cdots 1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p+1)} = \frac{p!}{(n+p+1)!/n!} = \frac{p! n!}{(n+p+1)!}.$$

Une autre possibilité est de raisonner par récurrence, mais avec une extrême prudence. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A(p)$ l'énoncé « pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $I(n, p) = n! p! / (n+p+1)!$. »

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le calcul donne $I(n, 0) = \frac{1}{n+1} = \frac{n! 0!}{(n+1)!}$. L'énoncé $A(0)$ est vrai.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'énoncé $A(p-1)$ est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de récurrence, alliée à l'hypothèse $A(p-1)$, donne alors

$$I(n, p) = \frac{p}{n+1} I(n+1, p-1) = \frac{p}{n+1} \times \frac{(n+1)! (p-1)!}{(n+p+1)!} = \frac{n! p!}{(n+p+1)!}.$$

L'énoncé $A(p)$ est donc vrai.

Par récurrence, l'énoncé $A(p)$ est vrai pour tout p dans $\mathbb{N}$, ce qui démontre le résultat demandé.

c. On choisit la fonction affine qui envoie 0 sur -1 et 1 sur 1, à savoir $t \mapsto 2t - 1$. On effectue donc le changement de variable $u = 2t - 1$, qui donne

$$du = 2 dt, \quad 1 + u = 2t, \quad 1 - u = 2(1 - t),$$

puis

$$\int_{-1}^1 (1+u)^n (1-u)^p du = \int_0^1 (2t)^n (2(1-t))^p 2 dt = 2^{n+p+1} I(n, p).$$

1. Commençons par

$$A_0 = 1, \quad A_1 = X^2 - 1, \quad A_2 = X^4 - 2X^2 + 1,$$

pour obtenir ensuite

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}.$$

2. Corrigé en classe. Le point crucial est le caractère défini positif.

On prend $P \in \mathbb{R}[X]$ et on suppose que $(P|P) = 0$. La fonction $t \mapsto P(t)^2$ est alors continue, positive, d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$ donc c'est la fonction nulle sur cet intervalle. On en déduit que P possède une infinité de racines, si bien que c'est le polynôme nul.

3. Le terme dominant de A_n est X^{2n} . Celui de $(A_n)^{(n)}$ est $(2n)(2n-1) \cdots (n+1)X^n$. Ainsi, le degré de P_n vaut n et son coefficient dominant vaut $\binom{2n}{n}/2^n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme A_n est pair. Chaque dérivation change la parité donc, après n dérivations, on obtient un polynôme pair si n est pair et un polynôme impair si n est impair. Au final, le polynôme P_n a la même parité que l'entier n .

5. Partons de l'égalité $A_n = (X - 1)^n(X + 1)^n$ et appliquons la formule de Leibniz

$$A_n^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X - 1)^n)^{(n-k)} ((X + 1)^n)^{(k)}.$$

Le calcul donne $((X + 1)^n)^{(k)} = n(n - 1) \cdots (n - k + 1)(X + 1)^{n-k} = \frac{n!}{(n - k)!} (X + 1)^{n-k}$.

Le même calcul donne $((X - 1)^n)^{(n-k)} = \frac{n!}{k!} (X - 1)^k$ donc

$$A_n^{(n)} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k.$$

En divisant par $n! 2^n$, il vient la formule attendue

$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X + 1)^k (X - 1)^{n-k}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quand on évalue P_n en 1 toutes les puissances strictement positives de $(X - 1)$ s'annule. Dans la somme précédente, il reste donc uniquement le terme d'indice $k = n$, qui vaut

$$\frac{1}{2^n} \times \binom{n}{n}^2 \times (1 + 1)^n \times (1 - 1)^0 \frac{1}{2^n} \times 1^2 \times 2^n \times 1 = 1.$$

On obtient donc $P_n(1) = 1$. La propriété de la question 4 donne $P_n(-1) = (-1)^n$.

7. La formule de Leibniz donne

$$((X^2 - 1)(X^2 - 1)^n)^{(n+2)} = (X^2 - 1)A_n^{(n+2)} + (n + 2)2XA_n^{(n+1)} + (n + 2)(n + 1)A_n^{(n)}$$

et

$$\left(((X^2 - 1)^{n+1})' \right)^{(n+1)} = (2(n + 1)X(X^2 - 1)^n)^{(n+1)} = 2(n + 1) \left(XA_n^{(n+1)} + (n + 1)A_n^{(n)} \right).$$

En soustrayant ces deux expressions, on obtient

$$(X^2 - 1)A_n^{(n+2)} + 2XA_n^{(n+1)} - n(n + 1)A_n^{(n)} = 0.$$

En multipliant par $-1/(2^n \times n!)$, il vient $(1 - X^2)P_n'' - 2XP_n' + n(n + 1)P_n = 0$.

8.a. La dérivée de f_n est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n'(t) = \frac{2P_n'(t)}{n(n + 1)} \left(n(n + 1)P_n(t) + (1 - t^2)P_n''(t) - tP_n'(t) \right) = \frac{2tP_n'(t)^2}{n(n + 1)}.$$

On voit que $f_n'(t)$ a le signe de t . La fonction f_n est donc décroissante sur $] - \infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

8.b. En particulier, pour tout t dans $[-1, 1]$, on obtient, en remarquant que f_n est paire,

$$\leq f_n(t) \leq f_n(1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f_n(t) \leq P_n(1)^2 = 1.$$

Ainsi, pour tout t dans $[-1, 1]$, il vient $P_n(t)^2 \leq f_n(t) \leq 1$ donc $|P_n(t)| \leq 1$.

9. Dans le cas $k = 0$, on trouve

$$(-1)^k (A_n^{(n-k)} | Q^{(k)}) = (A_n^{(n)} | Q).$$

Soit maintenant un entier k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ pour lequel l'égalité $(-1)^k (A_n^{(n-k)} | Q^{(k)}) = (A_n^{(n)} | Q)$ est vérifiée. Une intégration par parties donne

$$(A_n^{(n-k)} | Q^{(k)}) = \int_{-1}^1 A_n^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) dt = \left[A_n^{(n-1-k)}(t) Q^{(k)}(t) \right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^1 A_n^{(n-1-k)}(t) Q^{(k+1)}(t) dt.$$

La factorisation $A_n = (X-1)^n (X+1)^n$ donne que 1 et -1 sont des racines de A_n de multiplicité n donc

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad A_n^{(j)}(1) = 0, \quad A_n^{(j)}(-1) = 0.$$

L'entier $n-1-k$ est dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $A_n^{(n-1-k)}(1)$ et $A_n^{(n-1-k)}(-1)$ sont nuls. Il reste donc

$$(A_n^{(n-k)} | Q^{(k)}) = - \int_{-1}^1 A_n^{(n-1-k)}(t) Q^{(k+1)}(t) dt = -(A_n^{(n-1-k)} | Q^{(k+1)})$$

donc $(A_n^{(n-(k+1))} | Q^{(k+1)}) = -(A_n^{(n-k)} | Q^{(k)}) = (-1)^{k+1} (A_n^{(n)} | Q)$.

Par une récurrence finie, l'égalité $(-1)^k (A_n^{(n-k)} | Q^{(k)}) = (A_n^{(n)} | Q)$ est valable pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

10. Le polynôme P_0 vaut 1. Il forme donc à lui tout seul une base orthogonale de $\mathbb{R}_0[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux entiers i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$.

La formule précédente donne

$$(P_j | P_i) = \frac{1}{2^j \times j!} (A_j^{(j)} | P_i) = \frac{(-1)^j}{2^j \times j!} (A_j | P_i^{(j)}).$$

Les relations $\deg(P_i) = i < j$ donnent $P_i^{(j)} = 0$ puis $(P_j | P_i) = 0$.

Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale. Ses membres sont tous non nuls donc c'est une famille libre. C'est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

C'est finalement une base orthogonale de cet espace vectoriel.

11.a. On applique de nouveau la formule de la question 14

$$\|A_n^{(n)}\|^2 = (A_n^{(n)} | A_n^{(n)}) = (-1)^n (A_n | A_n^{(2n)}) = (-1)^n (A_n | (2n)!) = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt = (2n)! \int_{-1}^1 (1+t)^n (1-t)^n dt.$$

Le calcul de l'exercice 1 donne alors

$$\|A_n^{(n)}\|^2 = (2n)! \times 2^{2n+1} I(n, n) = (2n)! \times 2^{2n+1} \frac{n! n!}{(2n+1)!} = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{2n+1}.$$

11.b. On obtient donc

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{(2^n n!)^2} \times 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}.$$

11.c. Le calcul donne

$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}.$$

La formule de la question 11.b est donc également valable pour $n = 0$.

12.a. Le polynôme XP_n est dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. La famille $(P_0, \dots, P_{n+1})$ en est une base donc il existe un unique $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k.$$

12.b. La base $(P_0, \dots, P_{n+1})$ étant orthogonale, les coefficients $a_{n,k}$ sont donnés par la relation

$$a_{n,k} = \frac{(P_k | XP_n)}{(P_k | P_k)}.$$

12.c. Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. On observe l'égalité

$$(P_k | XP_n) = \int_{-1}^1 P_k(t) t P_n(t) dt = (XP_k | P_n).$$

On utilise maintenant la décomposition de XP_k analogue à celle de la question 12.a, pour obtenir

$$XP_k = \sum_{i=0}^{k+1} a_{k,i} P_i \quad \text{puis} \quad (XP_k | P_n) = \sum_{i=0}^{k+1} a_{k,i} (P_i | P_n) = 0$$

puis $(P_k | XP_n) = 0$ puis $a_{n,k} = 0$.

12.d. Partons de l'égalité $a_{n,n} = (P_n | XP_n) / (P_n | P_n)$ puis observons l'écriture intégrale du numérateur

$$(P_n | XP_n) = \int_{-1}^1 t P_n(t)^2 dt.$$

D'après la question 4, le polynôme P_n^2 est pair. La fonction $t \mapsto t P_n(t)^2$ est donc impaire, si bien que son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle.

Il vient $(P_n | XP_n) = 0$ puis $a_{n,n} = 0$.

12.e. Il reste alors $XP_n = a_{n,n+1} P_{n+1} + a_{n,n-1} P_{n-1}$.

Les polynômes XP_n, P_{n+1}, P_{n-1} ont pour degrés respectifs $n+1, n+1, n-1$ donc les coefficients dominants de XP_n et $a_{n,n+1} P_{n+1}$ sont identiques, ce qui donne

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^n} = a_{n,n+1} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{n+1}} \quad \text{puis} \quad a_{n,n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \times \frac{2^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+2)} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

12.f. Repartons de l'égalité $XP_n = a_{n,n+1} P_{n+1} + a_{n,n-1} P_{n-1}$. En évaluant en 1, il vient

$$1 = a_{n,n+1} + a_{n,n-1} \quad \text{puis} \quad a_{n,n-1} = 1 - a_{n,n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

12.g. Il reste donc $XP_n = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}$ puis

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} XP_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}.$$

12.h. L'application de cette relation de récurrence donne

$$P_3 = \frac{1}{3} (5XP_2 - 2P_1) = \frac{1}{2} (5X^3 - 3X), \quad \text{puis} \quad P_4 = \frac{1}{8} (35X^4 - 30X^2 + 3) \quad \text{et} \quad P_5 = \frac{1}{8} (63X^5 - 70X^3 + 15X).$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, notons (B_k) l'énoncé « Le polynôme $A_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $] - 1, 1[$ ».

L'énoncé (B_0) est banalement vrai. Soit maintenant un entier k dans $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ pour lequel l'énoncé (B_k) est vrai. Il existe donc des nombres $a_1, \dots, a_k$ tels que

$$-1 < a_1 < \dots < a_k < 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad A_n^{(k)}(a_i) = 0.$$

On sait de plus que $A_n^{(k)}(-1)$ et $A_n^{(k)}(1)$ sont nuls (car $k < n$), ainsi qu'on l'a expliqué à la question 14. On applique le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[-1, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{k-1}, a_k], [a_k, 1]$: sur chacun de ces intervalles, la fonction $A_n^{(k)}$ est continue, dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant, à valeurs réelles, en prenant la même valeur aux deux bornes, donc il existe

$$b_0 \in] - 1, a_1[, \quad b_1 \in]a_1, a_2[, \quad \dots, \quad b_{k-1} \in]a_{k-1}, a_k[, \quad b_k \in]a_k, 1[$$

tels que pour tout i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, on ait $A_n^{(k+1)}(b_i) = 0$. On a alors trouvé $k + 1$ racines distinctes (choisies dans des intervalles tous disjoints) de $A_n^{(k+1)}$ dans $] - 1, 1[$ donc l'énoncé (B_{k+1}) est vrai.

Par une récurrence finie, les énoncés $(B_0), \dots, (B_n)$ sont vrais. En particulier, le polynôme $A_n^{(n)}$ possède au moins n racines distinctes dans $] - 1, 1[$ et il en est de même pour le polynôme P_n .

Le polynôme P_n étant de degré n , il admet finalement exactement n racines et elles sont toutes dans $] - 1, 1[$ (et ce sont des racines simples).

Exercice 2.

1.a. Cette fois encore, attention à bien isoler le terme d'indice $k = 0$ dans la somme. L'expression de g_λ se réécrit

$$g_\lambda(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - \lambda(b-x)^{n+1}.$$

On trouve ainsi $g_\lambda(b) = 0$.

1.b. Il suffit de choisir $\lambda = \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right)$.

1.c. La fonction g_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment délimité par a et b , à valeurs réelles, avec $g_\lambda(a) = g_\lambda(b)$ donc, par le théorème de Rolle, il existe c compris strictement entre a et b tel que $g'_\lambda(c) = 0$.

1.d. Un calcul de dérivée donne, en isolant de la somme le terme d'indice $k = 0$,

$$\forall x \in I, \quad g'_\lambda(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \right) + \lambda(n+1)(b-x)^n.$$

La somme est télescopique. Il reste

$$\forall x \in I, \quad g'_\lambda(x) = -f'(x) - \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - f'(x) \right) + \lambda(n+1)(b-x)^n = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(x) - \lambda(n+1)! \right).$$

L'égalité $g'_\lambda(c) = 0$ donne donc $\lambda = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. L'égalité $g_\lambda(a) = 0$ donne finalement

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

2.a. Soit $x > 0$. La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, à valeurs réelles, donc il est possible d'appliquer le théorème de Taylor-Lagrange dans le cas $n = 2$ pour le choix $(a, b) = (0, x)$.

Ce théorème donne l'existence d'un élément $c(x)$ dans $]0, x[$ tel que

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\sin^{(3)}(c(x))}{3!} x^3.$$

Les premières dérivées de la fonction sinus sont

$$\sin' = \cos, \quad \sin'' = -\sin, \quad \sin''' = -\cos,$$

donc l'égalité ci-dessus se réécrit

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} \cos(c(x)).$$

En posant $\theta(x) = c(x)/x$, on définit un élément θ de $]0, 1[$ tel que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\theta(x)).$$

2.b. L'encadrement $0 \leq x\theta(x) \leq x$ montre que $x\theta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Rappelons le développement limité du cosinus à l'ordre 2 en 0

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Par substitution, on obtient

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} \left(1 - \frac{x^2\theta(x)^2}{2} + o(x^2\theta(x)^2) \right).$$

Là encore, l'encadrement $0 \leq x\theta(x) \leq x$ montre que le reste en $o(x^2\theta(x)^2)$ peut être remplacé par $o(x^2)$, si bien que la formule précédent donne

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} \theta(x)^2 + o(x^5).$$

Reproduisons le développement limité déjà rappelé au début du devoir

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Effectuons la différence puis simplifions par $x^5/12$. Il reste

$$\theta(x)^2 = \frac{1}{10} + o(1).$$

On en déduit que $\theta(x)^2$ tend vers $1/10$ quand x tend vers 0.

La fonction θ étant à valeurs positives, on en déduit qu'elle admet la limite $1/\sqrt{10}$ en 0.

3.a. Le théorème de Taylor-Lagrange donne l'existence d'un élément $c(x, h)$ dans $]x, x+h[$ et d'un élément $c(x, -h)$ dans $]x-h, x[$ tels que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c(x, h))}{2} h^2 \quad \text{et} \quad f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(c(x, -h))}{2} h^2.$$

Par soustraction, on obtient

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^2}{2} (f''(c(x, h)) - f''(c(x, -h))) \quad \text{puis} \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h}{4} (f''(c(x, h)) - f''(c(x, -h)))$$

Par inégalité triangulaire, il vient alors

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{h}{4} (|f''(c(x, h))| + |f''(c(x, -h))|) \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2.$$

3.b. En choisissant par exemple $h = 1$, on obtient la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq M_0 + \frac{M_2}{2},$$

qui prouve que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

3.c. La majoration de la question 3.a est valable pour tout x réel, ce qui donne

$$\forall h > 0, \quad M_1 \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h.$$

L'énoncé suggère donc de trouver une valeur de h pour laquelle ce majorant vaut $\sqrt{2M_0M_2}$. En résolvant l'équation, on peut voir que le choix $h = \sqrt{M_0/(2M_2)}$ convient.

En fait, si on étudie les variations de la fonction $h \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h$, on peut voir que cette valeur de h est celle qui minimise cette fonction.

La majoration demandée est donc la plus fine obtenue par cette méthode issue du théorème de Taylor-Lagrange.

4.a. Si x est nul, l'inégalité à démontrer est simplement $0 \leq 0$. Supposons donc dans la suite que x n'est pas nul et prenons n dans $\mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe C^∞ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Le théorème de Taylor-Lagrange donne donc l'existence d'un élément $c(x)$ compris strictement entre 0 et x tel que

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\exp^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{c(x)}.$$

Le nombre $c(x)$ est dans l'intervalle $[-|x|, |x|]$, ce qui donne $e^{c(x)} \leq e^{|x|}$ puis

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

4.b. Si $x = 0$, la suite $(|x|^n/n!)_{n \geq 0}$ est nulle à partir du rang 1 donc elle converge vers 0.

Supposons maintenant que x n'est pas nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors

$$\frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \frac{|x|}{n+1}.$$

Pour tout entier $n \geq \lceil |x| \rceil$, ce quotient est majoré par 1. La suite de terme général $|x|^n/n!$ est donc décroissante à partir de ce rang.

Cette suite est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0 donc elle converge. Notons sa limite ℓ . En passant à la limite dans la relation de récurrence

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^n}{n!} \times \frac{|x|}{n+1},$$

on obtient $\ell = \ell \times 0$ donc $\ell = 0$.

4.c. La majoration de la question 4.a permet d'en déduire que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x .

Autrement dit, cette série converge et sa somme vaut e^x .