PC* — mathématiques **vendredi 13 septembre 2019**
Corrigé du devoir en temps libre nº 1

Corrigé du devoir en temps libre nº 1

Exercice 1. a. Les fonctions

$$g_1 : t \mapsto \arccos(\sqrt{t}) \qquad \text{et} \qquad g_2 : t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$$

sont définies et continues sur $[0, 1]$.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Les nombres $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ sont dans $[0, 1]$ donc les intégrales

$$\int_0^{\cos^2(x)} g_1(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\sin^2(x)} g_2(t)\ \mathrm{d}t$$

sont bien définies. On en déduit que $\mathrm{G}(x)$ existe.

$\boxed{\text{La fonction G est donc bien définie sur } \mathbb{R}.}$

Soit x dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ sont paires donc on obtient $\mathrm{G}(-x) = \mathrm{G}(x)$.

$\boxed{\text{La fonction G est donc paire.}}$

Soit x dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ sont π-périodiques (cela découle des identités $\cos(y + \pi) = -\cos(y)$ et $\sin(y + \pi) = -\sin(y)$) donc on obtient $\mathrm{G}(x + \pi) = \mathrm{G}(x)$.

$\boxed{\text{La fonction G est donc } \pi\text{-périodique.}}$

---

b. Notons G_1 la primitive de g_1 sur $[0, 1]$ qui est nulle en 0. Notons G_2 la primitive de g_2 sur $[0, 1]$ qui est nulle en 0.

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ car ce sont des primitives de fonctions continues.

La fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$ donc la fonction $x \mapsto \mathrm{G}_1(\cos^2(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De même, la fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$ donc la fonction $x \mapsto \mathrm{G}_2(\sin^2(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

L'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}_1(\cos^2(x)) + \mathrm{G}_2(\sin^2(x))$$

montre alors que la fonction G est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{G}'(x) &= -2\sin(x)\cos(x) g_1(\cos^2(x)) + 2\sin(x)\cos(x) g_2(\sin^2(x)) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\left(\arcsin(|\sin(x)|) - \arccos(|\cos(x)|)\right).\end{aligned}$$

Prenons x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. Son sinus et son cosinus sont positifs donc il reste

$$\mathrm{G}'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\left(\arcsin(\sin(x)) - \arccos(\cos(x))\right).$$

Rappelons les identités

$$\forall s \in [0, \pi], \qquad \arccos(\cos(s)) = s \qquad \text{et} \qquad \forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arcsin(\sin(u)) = u.$$

Comme x est à la fois dans $[0, \pi]$ et $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, les deux simplifications peuvent s'effectuer et il reste

$$\mathrm{G}'(x) = 0.$$

$\boxed{\text{La fonction G est donc constante sur le segment } [0, \tfrac{\pi}{2}].}$

---

c. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$, de dérivées opposées, donc leur somme est constante.

$$\forall u \in]-1, 1[, \qquad \arccos(u) + \arcsin(u) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Les fonctions arcsin et arccos sont continues sur $[-1, 1]$ donc l'identité précédente est valable sur le segment $[-1, 1]$.

$$\boxed{\forall u \in [-1, 1], \qquad \arccos(u) + \arcsin(u) = \frac{\pi}{2}.}$$

---

d. On choisit x de sorte que $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ soient égaux entre eux, par exemple $x = \pi/4$.

$$\mathrm{G}(\pi/4) = \int_0^{1/2} (\arccos(\sqrt{t}) + \arcsin(\sqrt{t}))\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

---

e. Comme la fonction G est constante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}(\pi/4) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Par parité de la fonction G, on obtient ensuite

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \mathrm{G}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Comme la fonction G est π-périodique, on obtient finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{G}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

Exercice 2. a. Rappelons les inégalités $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{B})$. Par ailleurs, pour tout couple (n, p) d'entiers positifs et toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on connaît la majoration

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}) \leqslant \min(n, p),$$

ce qui donne $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \leqslant 2$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) \leqslant 2$ puis $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \leqslant 2$.

---

b. L'opération $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3$ donne que $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ a le même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice échelonnée en colonnes est de rang 3 si $1 - x \neq 0$ et de rang 2 sinon. La majoration de la question a impose donc que x soit égal à 1, ce qui donne

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son image est le plan engendré par les vecteurs $\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Son noyau est la droite dirigée par le vecteur $\mathrm{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

---

c. En reprenant les inégalités de la question a et le fait que $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ soit de rang 2, il vient

$$2 = \mathrm{rg}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A}) \leqslant 2 \qquad \text{et} \qquad 2 = \mathrm{rg}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{B}) \leqslant 2$$

donc A et B sont de rang 2.

---

d. On connaît l'inclusion $\mathrm{Im}(\mathrm{AB}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{A})$. Ces deux espaces sont de même dimension (à savoir 2) donc ils sont égaux.

On connaît aussi l'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{AB}) = \mathrm{rg}(\mathrm{B})$. Ces deux matrices ont trois colonnes donc la formule du rang donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{AB})) = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{B})) = 1.$$

On connaît l'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{AB})$ donc l'égalité des dimensions donne $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{AB})$.

---

e. On cherche une matrice A à deux colonnes dont l'image soit engendrée par les vecteurs C_1 et C_2. Le choix le plus simple semble être d'essayer $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une matrice B telle que

$$(\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2) \times \mathrm{B} = (\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2|\mathrm{C}_1).$$

Il suffit de choisir $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour avoir cette égalité.

Exercice 3. a. Soit un entier $n \geqslant 2$. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et strictement croissante, avec $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 2$, donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,2]$. Cette bijection sera notée φ_n plus loin.

En particulier, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans $[0,1]$. Cette solution est même dans $]0,1[$ puisqu'elle ne peut pas valoir 0 ou 1.

---

b. Soit un entier $n \geqslant 2$. On remarque les relations

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) - x_n^n + x_n^{n+1} = x_n^n(-1 + x_n) < 0$$

donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. On applique la fonction φ_{n+1}^{-1}, qui est strictement croissante, pour obtenir $x_n < x_{n+1}$.

---

c. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante, majorée par 1, donc elle converge. Sa limite sera notée ℓ dans la suite.

---

d. Pour tout $n \geqslant 2$, on connaît l'inégalité $x_n \leqslant 1$. Par passage à la limite, on obtient $\ell \leqslant 1$.

Faisons l'hypothèse $\ell < 1$. La croissance de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ donne

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \ell.$$

On obtient donc

$$\forall n \geqslant 2, \quad 1 = x_n + x_n^n \leqslant \ell + \ell^n,$$

puis $1 \leqslant \ell$ en faisant tendre n vers $+\infty$. Mais cela contredit l'hypothèse $\ell < 1$.

Cette absurdité donne la valeur $\ell = 1$.

Autre méthode. Prenons r dans $]0,1[$. On remarque que $f_n(r)$ tend vers r quand n tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier $n_r \geqslant 2$ tel que

$$\forall n \geqslant n_r, \quad f_n(r) < f_n(x_n).$$

Par stricte croissance de φ_n^{-1}, il vient

$$\forall n \geqslant n_r, \quad r < x_n.$$

On a alors prouvé ceci

$$\forall r \in]0,1[, \quad \exists n_r \geqslant 2, \quad \forall n \geqslant n_r, \quad r \leqslant x_n \leqslant 1.$$

On a donc prouvé que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

---

e. Soit un entier $n \geqslant 2$. On part de l'égalité $x_n^n = 1 - x_n = y_n$ puis on passe au logarithme, pour obtenir

$$\ln(y_n) = n\ln(x_n) \qquad \text{puis} \qquad \ln(y_n) = n\ln(1-y_n).$$

---

f. On sait que y_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\ln(1-y_n)$ est équivalent à $-y_n$. On en déduit que le quotient $-\ln(y_n)/(ny_n)$ tend vers 1.

Par continuité du logarithme, la différence $\ln(-\ln(y_n)) - \ln(n) - \ln(y_n)$ tend vers 0, ce qui se réécrit

$$-\ln(n) = \ln(y_n) - \ln(-\ln(y_n)) + \mathrm{o}(1).$$

On sait que $-\ln(y_n)$ tend vers $+\infty$ donc $\ln(-\ln(y_n))$ est négigeable devant $\ln(-\ln(y_n))$. Le membre de droite est donc équivalent à $\ln(y_n)$.

On a alors prouvé que $\ln(y_n)$ est équivalent à $-\ln(n)$. On avait vu que $-\ln(y_n)/(ny_n)$ tend vers 1. On en déduit finalement que y_n est équivalent à $\ln(n)/n$.

On obtient le développement asymptotique $x_n = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\,(1+\mathrm{o}(1))$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons un entier $m \geqslant n+1$, de manière à ce que $\binom{m-1}{n}$ soit strictement positif. Nommons $q_n(m)$ le quotient suivant

$$q_n(m) = \frac{\binom{m}{n-1}}{\binom{m-1}{n}}.$$

Le calcul donne

$$q_n(m) = \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} \times \frac{n!(m-n-1)!}{(m-1)!} = \frac{mn}{(m-n+1)(m-n)}.$$

On en déduit les équivalences

$$q_n(m) > 1 \iff mn > (m-n+1)(m-n) \iff m^2 - (3n-1)m + (n^2-n) < 0.$$

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - (3n-1)\mathrm{X} + (n^2-n)$ a pour discriminant

$$\Delta_n = (3n-1)^2 - 4(n^2-n) = 5n^2 - 2n + 1.$$

Ce discriminant est positif est les racines du polynôme en question sont

$$x_n = \frac{3n-1-\sqrt{5n^2-2n+1}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{3n-1+\sqrt{5n^2-2n+1}}{2}.$$

L'inégalité $q_n(m) > 1$ équivaut alors à $x_n < m < y_n$. L'entier $\mathrm{M}(n)$ est donc le plus grand entier strictement inférieur à y_n, c'est-à-dire $\lfloor y_n \rfloor$ (si y_n n'est pas un entier) ou $y_n - 1$ (si y_n est un entier.

Dans les deux cas, on a l'encadrement $y_n - 1 \leqslant \mathrm{M}(n) \leqslant y_n$ puis

$$\frac{y_n}{n} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{M}(n)}{n} \leqslant \frac{y_n}{n}.$$

On trouve de plus

$$\frac{y_n}{n} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{n} + \sqrt{5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)$$

donc ce quotient tend vers la constante $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Par le théorème des gendarmes, le quotient $\mathrm{M}(n)/n$ tend également vers cette constante.

Exercice 5. Question 1. Le calcul donne

$$\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1, \qquad \mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}, \qquad \mathrm{T}_4 = 8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1.$$

Question 2. Pour tout entier n, notons H_n l'identité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_n(\cos(t)) = \cos(nt).$$

Pour tout t réel, on remarque les égalités $\mathrm{T}_0(\cos(t)) = 1 = \cos(0.t)$ et $\mathrm{T}_1(\cos(t)) = \cos(t)$. Les identités H_0 et H_1 sont donc vraies.

Prenons maintenant un entier n pour lequel les identités H_n et H_{n+1} sont vraies. Soit t dans $\mathbb{R}$. Rappelons l'identité

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{n+2}(\cos(t)) &= 2\cos(t)\mathrm{T}_{n+1}(\cos(t)) - \mathrm{T}_n(\cos(t)) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)\\ &= (\cos((n+2)t) + \cos(nt)) - \cos(nt)\\ &= \cos((n+2)t).\end{aligned}$$

L'identité H_{n+2} est prouvée.

Par une récurrence d'ordre deux, l'identité H_n est prouvée pour tout entier n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Q un polynôme vérifiant la même identité que T_n. Pour tout t réel, le nombre $\cos(t)$ est alors une racine du polynôme $\mathrm{T}_n - \mathrm{Q}$. Ce polynôme admet donc pour racines tous les éléments de $[-1, 1]$. Ça fait une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

Le polynôme T_n est donc le seul à vérifier cette identité.

Question 3. On remarque que T_0 est de degré 0 et T_1 est de degré 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que T_n est degré n et que T_{n+1} est de degré $n+1$.

Le polynôme $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$ est de degré $n+2$, ce qui est strictement supérieur au degré de $-\mathrm{T}_n$ donc le degré de T_{n+2} vaut $n+2$.

Par une récurrence d'ordre deux, on peut conclure que pour tout entier n, le degré de T_n vaut n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le même raisonnement montre que le coefficient dominant de T_{n+2} est égal à celui de $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$, c'est-à-dire au double de celui de T_{n+1}. Les coefficients dominants des T_k forment donc une suite géométrique de raison 2 à partir du rang $k = 1$. Le coefficient dominant de T_1 vaut 1 donc, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_k vaut 2^{k-1}. Le coefficient dominant de T_0 vaut 0, ce qui nécessite de le traiter à part.

Question 4. Première méthode. On peut prouver l'égalité $\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$ par une récurrence d'ordre deux.

Deuxième méthode. La substitution $t \leftarrow t + \pi$ donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_n(-\cos(t)) = \mathrm{T}_n(\cos(t+\pi)) = \cos(nt + n\pi) = (-1)^n\cos(nt) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\cos(t)).$$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) - (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$ admet tous les éléments de $[-1, 1]$ pour racines donc c'est le polynôme nul.

Question 5. Pour tout entier relatif k, on remarque l'égalité

$$\mathrm{T}_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{\pi}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Tous les nombres de la forme $x_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ sont donc des racines de T_n. La périodicité et la parité du cosinus entraînent cependant de nombreuses répétitions parmi les x_k.

Rappelons que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc injective sur cet intervalle. Remarquons l'équivalence

$$0 \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leqslant \pi \iff 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Les nombres $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont donc deux à deux distincts. Ce sont n racines distinctes du polynôme T_n, qui est de degré n, donc nous avons trouvé là toutes ses racines.

On obtient finalement la factorisation $\mathrm{T}_n = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Question 6. Soit un entier $n \geqslant 2$ (je fais cette hypothèse pour que T_n' ne soit pas un polynôme constant. En dérivant l'identité de la question 2, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad -\sin(t) \times \mathrm{T}_n'(\cos(t)) = -n\sin(nt).$$

En particulier, pour tout t dans $]0,\pi[$, on obtient $\mathrm{T}_n'(\cos(t)) = n\sin(nt)/\sin(t)$.

Si $\sin(t) \neq 0$ et $\sin(nt) = 0$, alors $\cos(t)$ est une racine de T_n'. Les valeurs de t convenables sont celles de la forme $k\pi/n$, où k décrit l'ensemble des entiers non multiples de n. La contrainte de prendre t dans l'intervalle ouvert $]0,\pi[$ restreint le choix à $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Posons donc

$$\forall k \in [\![1, n-1,]\!], \qquad y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Les nombres $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sont $(n-1)$ racines de T_n' toutes distinctes (là encore, on utilise la stricte décroissance du cosinus sur $]0,\pi[$). Le polynôme T_n' est de degré $n-1$ et son coefficient dominant vaut $n2^{n-1}$. On obtient donc la factorisation

$$\mathrm{T}_n' = n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Question 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule de Moivre, combinée à celle du pivot, donne

$$\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt) = (\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(t)(\mathrm{i}\sin(t))^k.$$

Les termes d'indices pairs sont réel. Les termes d'indices impairs sont imaginaires purs. En isolant la partie réelle, il vient

$$\cos(nt) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}(t)(-1)^p\sin^{2p}(t) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}(t)(\cos^2(t)-1)^p.$$

Ainsi, le polynôme $\sum\limits_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\mathrm{X}^{n-2p}(t)(\mathrm{X}-1)^p$ vérifie l'identité de la question 2.

D'après l'unicité de la question 2, on en déduit que ce polynôme est égal à T_n. Cette formule permet d'obtenir directement le degré et la parité de T_n, ainsi que son coefficient dominant avec un peu de travail.

Question 8. Déjà, la fonction φ est à valeurs réelles. Je passe sur le caractère symétrique et la bilinéarité (cette dernière découle directement de la linéarité de l'intégrale).

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On observe l'inégalité

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = \int_0^\pi \mathrm{P}(\cos(t))^2\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

On suppose maintenant que $\varphi(\mathrm{P},\mathrm{P})$ est nul. La fonction $t \mapsto \mathrm{P}(\cos(t))^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0,\pi]$ donc c'est la fonction nulle. Le polynôme P admet donc pour racines tous les éléments de $[-1,1]$, ce qui en fait une infinité, donc c'est le polynôme nul.

On a alors prouvé que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Question 9. Posons $\mathrm{R} = \mathrm{P} \times \mathrm{Q}$. Ce polynôme est impair. On obtient

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_0^\pi \mathrm{R}(\cos(t))\ \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \mathrm{R}(-\cos(t))\ \mathrm{d}t = -\int_0^\pi \mathrm{R}(\cos(\pi - t))\ \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u \leftarrow \pi - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Il échange les bornes de l'intégrale et donne $\mathrm{d}t = -\ \mathrm{d}u$, donc

$$\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_\pi^0 \mathrm{R}(\cos(u))(-\ \mathrm{d}u) = -\int_0^\pi \mathrm{R}(\cos(u))\ \mathrm{d}u = -\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \qquad \text{donc} \qquad \varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = 0.$$

Ainsi, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ constitués des polynômes pairs et des polynômes impairs sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Question 10. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Par une linéarisation, on obtient

$$\varphi(\mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m) = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\right)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on observe que $\int_0^\pi \cos(kt)\ \mathrm{d}t$ vaut π si $k = 0$ et 0 si $k \geqslant 1$. On en déduit finalement la valeur

$$\varphi(\mathrm{T}_n, \mathrm{T}_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{si } n = m \text{ et } n \neq 0. \end{cases}$$

En particulier, la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ.

Question 11. Pour tout $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$, on remarque l'égalité

$$\mathrm{F}_n(a) = \left|\left|\mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k\right|\right|^2.$$

La question est donc de trouver

$$\min\left\{||\mathrm{X}^n - \mathrm{Q}||\ ;\ \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\right\}.$$

Le cours sur la projection orthogonale garantit que ce minimum existe est qu'il est réalisé en choisissant pour Q le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Notons R_n le polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{T}_n = 2^{n-1}\mathrm{X}^n + \mathrm{R}_n$. On observe alors la relation suivante

$$\mathrm{X}^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\underbrace{\mathrm{T}_n}_{\in(\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}])^\perp} - \underbrace{\mathrm{R}_n}_{\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}\right).$$

Le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est donc le polynôme $-\mathrm{R}_n/2^{n-1}$ et le minimum cherché faut donc

$$\left|\left|\mathrm{X}^n + \frac{1}{2^{n-1}}\right|\right|^2 = \left|\left|\frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{T}_n\right|\right|^2 = \frac{1}{2^{2n-2}} \times \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6. a. L'égalité $f(0) = f(0) + f(0)$ donne $f(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f((n+1)x) = f(nx) + f(x)$$

montre que la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $f(x)$. Son premier terme étant nul, on obtient directement — sans avoir besoin de rédiger une récurrence — l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x).$$

Soit maintenant un entier négatif m. L'entier $-m$ est positif, ce qui donne $f(-mx) = -mf(x)$. On observe alors les égalités

$$0 = f(0) = f(mx) + f(-mx) \qquad \text{donc} \qquad f(mx) = -f(-mx) = mf(x).$$

La relation $f(nx) = nf(x)$ est finalement valable pour tout entier relatif n.

---

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Prenons un entier a dans $\mathbb{Z}$ et un entier b dans $\mathbb{N}^*$ tel que $q = a/b$. Observons alors les égalités

$$f(qx) = f(ax/b) = af(x/b) \qquad \text{et} \qquad f(x) = bf(x/b),$$

ce qui donne $f(qx) = (a/b)f(x) = qf(x)$.

---

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$q_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$
On connaît l'encadrement
$$x - \frac{1}{n} \leqslant q_n(x) \leqslant x,$$
qui permet de montrer que la suite $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x. La continuité de f permet d'en déduire que la suite $(f(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$.

Les termes de la suite $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont tous rationnels, ce qui donne
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(q_n(x)) = q_n(x) \times f(1).$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x) = x \times f(1)$.

---

d. On suppose que la fonction f est croissante. Dans le cas contraire, le raisonnement qui suit s'adapte en inversant toutes les inégalités et on obtient la même conclusion.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Reprenons la notation $q_n(x)$ de la question précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on connaît l'encadrement
$$q_n(x) \leqslant x \leqslant q_n(x) + \frac{1}{n}.$$
La croissance de f donne alors
$$f(q_n(x)) \leqslant f(x) \leqslant f(q_n(x) + 1/n).$$
Les nombres $q_n(x)$ et $q_n(x) + 1/n$ sont rationnels donc
$$q_n(x)f(1) \leqslant f(x) \leqslant \left(q_n(x) + \frac{1}{n}\right) f(1).$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$ donc $f(x) = xf(1)$.

---

e. La question b montre que les fonctions additives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les $\mathbb{Q}$-endomorphismes de $\mathbb{R}$. La question e nous demande donc de trouver des $\mathbb{Q}$-endomorphismes de $\mathbb{R}$ qui ne soient pas des multiples de l'identité.

La méthode la plus simple pour construire cela est de prendre deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}$ (vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel) non triviaux et de prendre pour f le projecteur sur F parallèlement à G.

La difficulté est de justifier l'existence d'un tel couple de sous-espaces vectoriels, ce qui n'est en fait pas faisable dans le cadre de notre programme, qui ne donne aucun résultat sur l'existence de supplémentaires dans les espaces vectoriels de dimension infinie.

Question subsidiaire. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts.
Montrer que la famille $(\ln(p_1), \ldots, \ln(p_n))$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Ceci prouve que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.
