

Exercice 1. Famille orthogonale de polynômes (*) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par la formule

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

- a. Pour tout couple (i, j) de $\mathbb{N}^2$, calculer $(X^i|X^j)$.
- b. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes réels telle que
 1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n soit unitaire (au sens des polynômes) ;
 2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- c. Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 .
- d. En déduire le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$F_2 : (a, b) \mapsto \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

Solution de l'exercice 1. Corrigé en classe.

Exercice 2. (*) Justifier que la fonction

$$f : (a, b) \mapsto \int_0^1 (e^t - at - b)^2 dt$$

possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et qu'il est atteint en un unique point.

Déterminer ce minimum.

Solution de l'exercice 2. Corrigé en classe.

Exercice 3. ()** Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2. On suppose que la variance de X est strictement positive.

Trouver a et b réels minimisant la quantité $f(a, b) = \mathbb{E}((Y - aX - b)^2)$.

Solution de l'exercice 3.

Exercice 4. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Prouver que F est stable par A si, et seulement si, son orthogonal est stable par A^T .

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

Solution de l'exercice 4.

Exercice 5. ()** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E .

On se donne une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on note A la matrice représentative de u dans cette base.

On appelle *adjoint* de u tout endomorphisme v de E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

a. Dans cette question, on suppose que u possède un adjoint v . Déterminer la matrice représentative de v dans la base $\mathcal{E}$.

b. Montrer que u possède exactement un adjoint.

Solution de l'exercice 5.**Exercice 6. (**)** Déterminer

$$\sup \left\{ \int_{-1}^1 xP(x) \, dx ; P \in \mathbb{R}_2[X], \int_{-1}^1 P^2(x) \, dx = 1, \int_{-1}^1 P(x) \, dx = 0 \right\}.$$

Solution de l'exercice 6.**Exercice 7. (*)** Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E de dimension n . On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente p dans une certaine base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

$$\text{Montrer l'égalité } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2 = \text{rg}(A) \text{ puis l'inégalité } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rg}(A)}.$$

Solution de l'exercice 7.**Exercice 8. (*)** On note P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 1)$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.Déterminer la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur P .**Solution de l'exercice 8.** La méthode de Gram-Schmidt permet de construire une base orthogonale (u, w) de P en posant

$$w = v - \frac{(u|v)}{(u|u)}u.$$

Le calcul donne

$$w = (1, 1, 0, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1, 0) = \frac{1}{3}(1, 1, -2, 3).$$

Posons $w' = 3w$ pour simplifier. La famille (u, w') est aussi une base orthogonale de P .Étant donné un vecteur $a = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$, le projeté orthogonal de a sur P est donné par

$$p(a) = \frac{(u|a)}{(u|u)}u + \frac{(w'|a)}{(w'|w')}w' = \frac{x+y+t}{3}(1, 1, 0, 1) + \frac{x+y-2z+3t}{15}(1, 1, -2, 3)$$

c'est-à-dire

$$p(a) = \frac{1}{15}(6x+6y-2z+8t, 6x+6y-2z+8t, -2x-2y+4z-6t, 8x+8y-6z+14t).$$

La matrice attendue est donc

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 & 8 \\ 6 & 6 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 4 & -6 \\ 8 & 8 & -6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. (*) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E .Prouver l'égalité $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.**Solution de l'exercice 9.****Exercice 10. (*)** Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.**Solution de l'exercice 10.****Exercice 11. (*)** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, \dots, X_p)$ une base orthonormale de F .Démontrer que la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur F s'écrit $\sum_{k=1}^p X_k^T \cdot X_k$.

Solution de l'exercice 11.

Exercice 12. ()** Une *réflexion* d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale relativement à un *hyperplan*, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E dont la dimension vaut $\dim(E) - 1$.

On se donne deux vecteurs a et b de E distincts et non nuls tels que $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion de E qui envoie a sur b .

Solution de l'exercice 12.

Exercice 13. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a. Prouver l'égalité $\text{Ker}(M^T) = (\text{Im}(M))^\perp$.

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

b. Prouver l'égalité $\text{Ker}(M^T \cdot M) = \text{Ker}(M)$.

c. Prouver l'égalité $\text{rg}(M^T \cdot M) = \text{rg}(M)$.

d. Quelle égalité obtient-on pour $\text{Im}(M^T)$?

e. Dans cette question et la suivante, on ajoute la condition $2 \leq p < n$. On pose $B = M^T \cdot M$ et on suppose que M est de rang p .

Montrer alors que B est inversible. Montrer ensuite que la matrice $M \cdot B^{-1} \cdot M^T$ (notée P) est une matrice de projection orthogonale. Vérifier l'égalité $\text{Im}(P) = \text{Im}(M)$.

Solution de l'exercice 13. a. En notant $M_1, \dots, M_p$ les colonnes de M , on rappelle l'égalité

$$\text{Im}(M) = \text{Vect}(M_1, \dots, M_p).$$

Pour tout vecteur colonne X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on observe l'égalité

$$M^T X = \begin{pmatrix} M_1^T X \\ \vdots \\ M_p^T X \end{pmatrix}.$$

On en déduit les équivalences

$$X \in \text{Ker}(M^T) \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad M_k^T X = 0 \iff X \in \text{Vect}(M_1, \dots, M_p)^\perp \iff X \in \text{Im}(M)^\perp.$$

On a alors prouvé l'égalité $\text{Ker}(M^T) = \text{Im}(M)^\perp$.

Si M est symétrique ou antisymétrique, cette égalité devient $\text{Ker}(M) = \text{Im}(M)^\perp$.

b. L'inclusion $\text{Ker}(M) \subset \text{Ker}(M^T \cdot M)$ est directe.

Réciproquement, soit $X \in \text{Ker}(M^T \cdot M)$. Le carré de la norme de MX est alors donné par

$$\|MX\|^2 = (MX)^T \cdot (MX) = X^T \cdot (M^T \cdot M \cdot X) = 0, \quad \text{si bien que} \quad MX = 0.$$

On a prouvé l'inclusion $\text{Ker}(M^T \cdot M) \subset \text{Ker}(M)$. L'égalité $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^T \cdot M)$ est prouvée par double inclusion.

c. Les matrices M et $M^T \cdot M$ ont toutes deux p colonnes, donc la formule du rang donne

$$\text{rg}(M^T \cdot M) = p - \dim(\text{Ker}(M^T \cdot M)) = p - \dim(\text{Ker}(M)) = \text{rg}(M).$$

d. L'inclusion $\text{Im}(M^T \cdot M) \subset \text{Im}(M^T)$, alliée aux égalités $\text{rg}(M^T) = \text{rg}(M) = \text{rg}(M^T \cdot M)$, donne l'égalité $\text{Im}(M^T) = \text{Im}(M^T \cdot M)$.

e. La matrice B appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. L'égalité $\text{rg}(B) = \text{rg}(M) = p$ prouve que B est inversible.

Un calcul donne

$$P^2 = M \cdot B^{-1} \cdot \underbrace{(M^T \cdot M)}_{=I_p} \cdot B^{-1} \cdot M^T = M \cdot B^{-1} \cdot M^T = P.$$

La matrice P est donc une matrice de projection. Remarquons que la matrice B est symétrique. On en déduit que la matrice P est également symétrique, ce qui donne $\text{Ker}(P) = \text{Im}(P)^\perp$.

La matrice P est donc une matrice de projection orthogonale.

L'inclusion $\text{Im}(P) \subset \text{Im}(M)$ est directe. L'égalité des dimensions découle du calcul

$$\text{rg}(P) = \text{tr}(P) = \text{tr}(M \cdot B^{-1} \cdot M^T) = \text{tr}(M^T \cdot M \cdot B^{-1}) = \text{tr}(I_p) = p = \text{rg}(M).$$

On a alors prouvé l'égalité $\text{Im}(P) = \text{Im}(M)$. La matrice P est donc la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur $\text{Im}(M)$.

Exercice 14. ()** **Matrice de Gram** Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E . On lui associe sa *matrice de Gram*, qui est la matrice

$$G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i | x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$$

de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a. On note n la dimension de E . Trouver une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $M^T \cdot M = G(x_1, \dots, x_p)$.

b. Prouver l'égalité $\text{Ker}(M^T \cdot M) = \text{Ker}(M)$.

c. En déduire que la matrice $G(x_1, \dots, x_p)$ est inversible si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Solution de l'exercice 14. Corrigé en classe.

Exercice 15. (*)** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit nulle.

Prouver l'égalité $\text{Im}(A + A^T) = \text{Im}(A) + \text{Im}(A^T)$.

Solution de l'exercice 15. Soit $U \in \text{Im}(A + A^T)$. Il existe un vecteur V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = (A + A^T)V$. On en tire l'égalité

$$U = AV + A^T V,$$

qui donne l'appartenance de U à $\text{Im}(A) + \text{Im}(A^T)$. On a alors prouvé l'inclusion

$$\text{Im}(A + A^T) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(A^T).$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de prouver les inclusions $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(A + A^T)$ et $\text{Im}(A^T) \subset \text{Im}(A + A^T)$. Notons qu'il suffit de prouver une seule des deux — l'autre s'en déduit en remplaçant A par sa transposée.

On va utiliser l'égalité $\text{Im}(A^T) = \text{Im}(A^T A)$, obtenue à la question d de l'exercice 13. Prenons U dans cet espace vectoriel. Il existe un vecteur V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = A^T A V$.

L'égalité $A^2 V = 0$ donne alors $U = (A + A^T) A V$ donc $U \in \text{Im}(A + A^T)$.

On a ainsi prouvé l'inclusion $\text{Im}(A^T) \subset \text{Im}(A + A^T)$. La matrice $(A^T)^2$ est nulle donc on peut remplacer A par A^T dans cette inclusion, ce qui donne $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(A^T + A)$.

Finalement, la somme $\text{Im}(A) + \text{Im}(A^T)$ est incluse dans $\text{Im}(A + A^T)$, ce qui clôt la démonstration.

Remarque. L'hypothèse $A^2 = 0$ donne $\text{Im}(A) \perp \text{Im}(A^T)$. Pour le démontrer, prenons U dans $\text{Im}(A)$ et V dans $\text{Im}(A^T)$. Il existe des colonnes X et Y telles que $U = AX$ et $V = A^T Y$, ce qui donne

$$V^T U = (A^T Y)^T (AX) = Y^T (A^2) X = 0.$$