Compte rendu du devoir surveillé n° 1

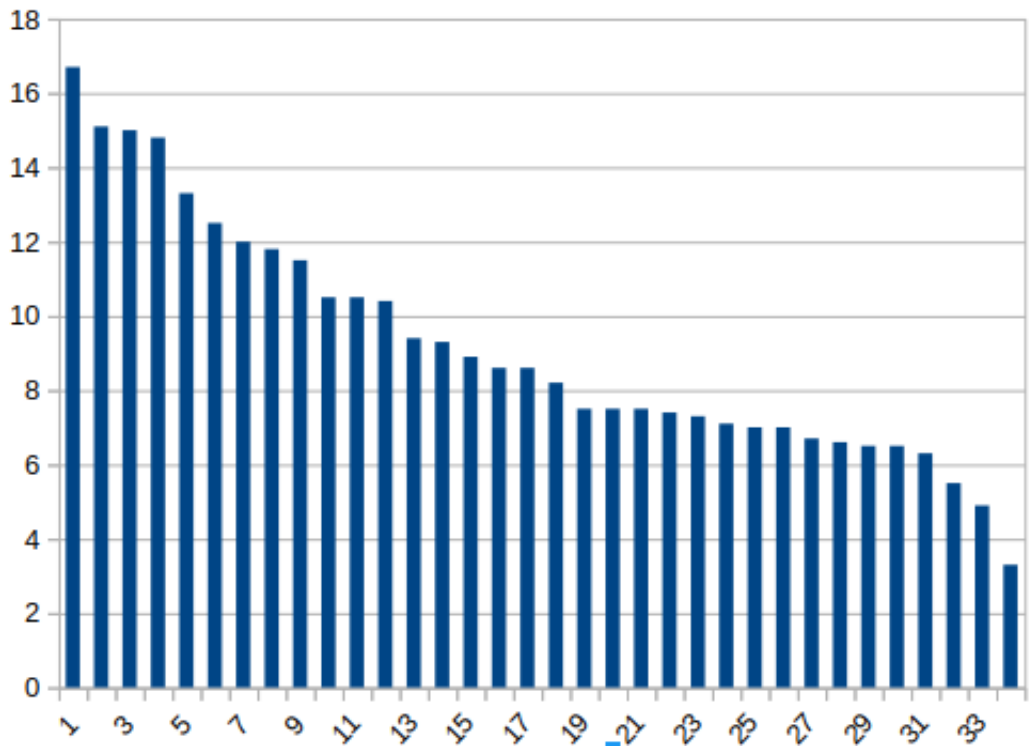
Thèmes abordés. Polynômes. Produits scalaires. Fonctions d'une variable réelle.

À propos du sujet. J'ai organisé ce sujet autour de deux problèmes indépendants : l'un sur les polynômes de Legendre ; l'autre sur le théorème de Taylor-Lagrange et quelques-unes de ses utilisations. L'exercice 1 avait pour objet un calcul utilisé dans l'un des problèmes et certaines des questions de cours étaient également là pour préparer le terrain.

Mon projet était de faire un sujet de difficulté raisonnable et de longueur normalement excessive. Il semble que j'aie échoué dans le calibrage de la difficulté, mais il faut voir la réalité en face : dans le cadre de la préparation des écrits de concours, je ne peux pas me permettre d'abaisser beaucoup la difficulté. Il va falloir travailler à une meilleure maîtrise du cours et des techniques afin d'affronter plus sereinement ce genre de sujet et de ne pas zapper tant de questions abordables.

Au final, la médiane se situe à 8,4, avec une moyenne à 9,18 et un écart-type de 3,22.

Explication de la notation. Quand je corrige, j'évalue chaque question sur 4 — c'est la note qui figure dans la marge. Ces évaluations sont alors pondérées par le barème indiqué dans les tableaux ci-dessus, pour fournir la note brute finale — vous ne rêvez pas, c'est le résultat d'un produit scalaire. Pour finir, je choisis un coefficient diviseur et j'arrondis le quotient au dixième supérieur. En l'occurrence, le total sur 218 a été divisé par 6.



Questions en vrac

Le maximum de points réalisable sur ces six questions est de 24. La moyenne de la classe sur cette partie est de 14,48. Le meilleur total est de 23.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Barème	1	0,5	0,5	1	2	1
Réussite	79,4 %	87,5 %	70,1 %	30,5 %	47,1 %	78,7 %

Question 1 (théorème de Rolle). Dans mon corrigé, j'ai oublié l'hypothèse « à valeurs réelles », ce qui est ironique quand on se souvient à quelle point j'ai insisté dessus lors du rappel en classe.

La notation $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})\cap\mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$, lue dans certaines copies, est discutable. Un élément de cette intersection est une fonction dont l'ensemble de définition est à la fois $[a,b]$ et $]a,b[$, ce qui est impossible. Il est moins risqué de donner les hypothèses avec des mots.

Question 2 (développement limité du sinus). Ce développement limité est connu mais la paresse consistant à ne pas calculer 5! (voire 3!) a été sactionnée.

Question 3 (image et noyau d'une matrice). Beaucoup de flou dans les réponses obtenues : erreurs dans la nature des objets manipulés.

Question 4 (multiplicité des racines d'un polynôme). Le simple concept de définition n'est pas toujours compris, ce qui est préoccupant dans la simple perspective d'apprendre un cours de manière générale. De même, tout le monde ne semble pas comprendre qu'une caractérisation est une condition nécessaire et suffisante.

La notion de multiplicité est globalement méconnue et souvent mal comprise. Seules trois copies obtiennent la note maximale sur cette question.

Mon objectif était de préparer le terrain pour la question 9 de l'exercice 2, ce qui est un fiasco total.

Question 5 (projection orthogonale sur un plan). Il s'agissait là de reproduire un calcul effectué en travaux dirigés quelques jours auparavant. Cette question s'est révélée très classante. Lorsque le calcul n'aboutissait pas, des formules littérales correctes ont été valorisées.

Question 6 (formule de Leibniz). Bonne connaissance globale de cette formule.

Exercice 1

Le maximum de points réalisable sur l'exercice 1 est de 18. La moyenne de la classe sur ce problème est de 9,82. Le total maximal a été réalisé dans trois copies.

	a	b	c
Barème	1,5	2	1
Réussite	89,7 %	33,1 %	44,9 %

Pas de problèmes majeurs pour l'intégration par parties de la question a. Cependant, plusieurs d'entre vous citent la classe $\mathcal{C}^1$ pour les fonctions qu'on primitive au lieu des fonctions qu'on dérive, ce qui traduit une incompréhension de cette notion.

Peu de réussite au calcul de la question b. Il était très délicat d'effectuer une démonstration par récurrence, à cause des deux indices, et presque toutes les tentatives ont échoué. Les démonstrations par itération de la relation de récurrence ont beaucoup plus souvent abouti.

Le changement de variable de la question c n'a été trouvé que par la moitié d'entre vous, ce qui est peu. Trouver deux coefficients a et b tels que la fonction $t\mapsto at+b$ envoie respectivement 0 sur -1 et 1 sur 1 devrait être une tâche facile.

Exercice 2

Le maximum de points réalisable sur l'exercice 2 est de 114. La moyenne de la classe sur ce problème est de 23,52. Le meilleur total est de 54.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8.a	Q8.b	Q9	Q10
Barème	0,5	1,5	1,5	1	1	1	2	1	1	2	2
Réussite	90,1 %	64,0 %	61,4 %	25,7 %	32,7 %	78,3 %	8,5 %	23,9 %	13,2 %	0,0 %	12,9 %

La question 2 a vu le défilé habituel des erreurs de méthode, voire d'erreurs dans la connaissance des points à vérifier. Comme prévu, beaucoup d'entre vous ont tenu à traiter le caractère défini positif par équivalences, ce qui est une erreur de méthode ; comme je l'avais annoncé, toutes ces tentatives ont échoué.

Aux questions 3 et 4, les tentatives de raisonnement par récurrence n'étaient pas raisonnable : aucune formule ne permettait de passer de P_n à P_{n+1}.

Beaucoup d'erreurs de calcul à la question 5. C'est nettement mieux à la question 6. Trois copies seulement mènent à bien le calcul de la question 7.

Beaucoup d'erreurs de calcul en 8.a. La moitié des tentatives aboutissent à une dérivée nulle pour f_n' à cause d'une utilisation erronée de la formule de la question précédente (confusion entre 2 et 1). Il est surprenant que les réponses correctes à 8.a n'aient pas été toujours suivies d'une résolution favorable de 8.b.

Zéro réussite à la question 9. La nécessité d'une récurrence finie a été plusieurs fois détectée, de même que le recours à une intégration par parties, mais personne n'a pensé à utiliser la multiplicité des racines pour justifier l'annulation du terme tout intégré.

Énormément de malentendus à la question 10. Non, une famille de polynômes de degrés échelonnés n'est pas forcément libre : il faut vérifier/signaler en plus que ces polynômes ne sont pas nuls. Non, une famille libre de $(n+1)$ polynômes n'est pas forcément une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$: il faut vérifier/signaler en plus que ces polynômes appartiennent bien à $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Cela dit, l'essentiel de la question 10 portait sur le caractère orthogonal de la famille, qui découlait de la formule de la question précédente.

	Q11.a	Q11.b	Q11.c	Q12.a	Q12.b	Q12.c	Q12.d	Q12.e	Q12.f	Q12.g	Q12.h	Q13
Barème	2	1	0,5	1	1	1,5	0,5	1	0,5	0,5	1,5	3
Réussite	13,2 %	19,9 %	21,3 %	14,7 %	13,2 %	2,9 %	8,8 %	5,9 %	14,7 %	11,8 %	12,5 %	2,2 %

La question 11.a nécessitait de se référer à plusieurs calculs antérieurs, mais tous les liens étaient donnés dans l'énoncé. La piste n'a été suivie jusqu'au bout que par cinq d'entre vous.
La question 11.c a donné lieu à un peu de grappillage, mais étrangement, plusieurs d'entre vous ont attribué au polynôme 1 une norme égale à 1, ce qui sort de nulle part et est complètement faux.

La question 12.a aurait dû donner lieu à du grappillage, mais sa simplicité n'a pas été repérée. La question 12.b était une question de cours mais l'argument « base *orthogonale* » a parfois été oublié.

L'application numérique de la question 12.h a engendré beaucoup d'erreurs de calcul : si on veut que P_{n+1} soit égal à P_3, on prend $n = 2$ et non $n = 3$.

La question 13 était objectivement très difficile, par son absence totale d'indications. J'avais évoqué oralement sa résolution en classe au détour d'un exercice sur le théorème de Rolle et l'un d'entre vous s'en est souvenu, ce qui s'est révélé lucratif.

Exercice 3

Le maximum de points réalisable sur l'exercice 3 est de 62. La moyenne de la classe sur ce problème est de $6,96$. Le meilleur total est de 17.

	Q1.a	Q1.b	Q1.c	Q3.a	Q3.b	Q4.a	Q4.b	4.c
Barème	0,5	0,5	1	2	0,5	1	1	0,5
Réussite	77,2 %	55,9 %	48,5 %	5,9 %	22,8 %	13,2 %	7,0 %	10,7 %

Peu d'erreurs en 1.a. En 1.b, il a bien été vu qu'il s'agissait juste d'une équation de degré 1, mais beaucoup de réponses sont à côté de la question sur le plan logique. En 1.c, presque tout le monde a vu qu'il s'agissait du théorème de Rolle mais il a souvent été très mal appliqué, avec des vérifications ne correspondant pas aux hypothèses du théorèmes, même dans des copies où la question de cours avait reçu une réponse satisfaisante.
La question 1.d n'a eu aucun succès, la dérivation n'étant jamais menée à son terme.

Le reste du problème est un fiasco total : personne n'a vu que les questions 2.a et 4.a étaient des applications du théorème de la première partie. J'ai vu des tentatives courageuses en 4.a à base de reste intégral, alors que le propos était justement de contourner ce raisonnement long et cahoteux.