PC* — mathématiques **samedi 5 octobre 2019**
Corrigé du devoir en temps libre n° 2

Corrigé du devoir en temps libre n° 2

Exercice 1. 1. On applique la formule du binôme

$$\begin{aligned}(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{2n+1}-(\mathrm{X}-\mathrm{i})^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{2n+1-k}-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{2n+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(1-(-1)^k)\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{2n+1-k}.\end{aligned}$$

On sait que $1-(-1)^k$ est nul si k est pair et vaut 2 si k est impair. Il reste donc uniquement les termes dont l'indice k est de la forme $2p+1$, où l'entier p varie alors entre 0 et n.

$$(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{2n+1}-(\mathrm{X}-\mathrm{i})^{2n+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}2\mathrm{i}^{2p+1}\mathrm{X}^{2n+1-2p-1}=2\mathrm{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\mathrm{X}^{2n-2p}=2\mathrm{i}\mathrm{P}_n(\mathrm{X}^2).$$

---

2. Prenons t dans l'intervalle $]0,\pi/2]$. On trouve alors

$$\mathrm{P}_n(\operatorname{cotan}^2(t))=\frac{(\operatorname{cotan}(t)+\mathrm{i})^{2n+1}-(\operatorname{cotan}(t)-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}}=\frac{(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t))^{2n+1}-(\cos(t)-\mathrm{i}\sin(t))^{2n+1}}{2\mathrm{i}\sin^{2n+1}(t)}$$

puis

$$\mathrm{P}_n(\operatorname{cotan}^2(t))=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1)t}}{2\mathrm{i}}\times\frac{1}{\sin^{2n+1}(t)}=\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

---

3. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Le nombre $\frac{k\pi}{2n+1}$ est alors dans $]0,\pi/2]$. Appliquons-lui la formule de la question précédente

$$\mathrm{P}_n(\operatorname{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1}))=\frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1}(k\pi/(2n+1))}=0.$$

Un calcul donne

$$\forall t\in]0,\pi[,\qquad \operatorname{cotan}'(t)=\frac{-\sin^2(t)-\cos^2(t)}{\sin^2(t)}=-\frac{1}{\sin^2(t)}<0.$$

La fonction cotangente est donc strictement décroissante sur $]0,\pi/2]$. On en déduit les inégalités

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)>\operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)>\cdots>\operatorname{cotan}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\geqslant\operatorname{cotan}(\pi/2)=0$$

puis

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)>\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)>\cdots>\operatorname{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right).$$

Ainsi, les nombres $\operatorname{cotan}^2(k\pi/(2n+1))$, pour k variant de 1 à n, sont n racines distinctes de P_n. Ce polynôme est de degré n, donc ce sont ses seules racines.

---

4. Les termes en X^n et en X^{n-1} de P_n s'écrivent

$$\binom{2n+1}{1}\mathrm{X}^n\qquad\text{et}\qquad-\binom{2n+1}{3}\mathrm{X}^{n-1}.$$

La somme des racines de ce polynôme vaut donc

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}\times\frac{1}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

5.a. On définit sur $[0, \pi/2]$ la fonction $g : t \mapsto \sin(t) - t$. Cette fonction est dérivable, avec

$$\forall t \in [0, \pi/2], \qquad g'(t) = \cos(t) - 1 \leqslant 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. L'égalité $g(0) = 0$ permet d'en déduire que la fonction g est négative sur cet intervalle. On obtient donc

$$\forall t \in [0, \pi/2], \qquad \sin(t) \leqslant t.$$

5.b. Pour tout t dans l'intervalle $]0, \pi/2]$, écrivons $\varphi(t) = t\cos(t)/\sin(t)$. Par dérivation d'un quotient, il vient

$$\forall t \in]0, \pi/2], \qquad \varphi(t) = \frac{\sin(t)(\cos(t) - t\sin(t)) - t\cos(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{\sin(t)\cos(t) - t}{\sin^2(t)}.$$

5.c. Soit t dans $]0, \pi/2]$. On connaît les inégalités $0 \leqslant \sin(t) \leqslant t$ et $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ donc

$$\cos(t)\sin(t) \leqslant t, \qquad \text{donc} \qquad \varphi'(t) \leqslant 0.$$

La fonction φ est donc décroissante sur $]0, \pi/2]$. On trouve par ailleurs $\varphi(\pi/2) = 0$ et

$$\varphi(t) = \frac{t\cos(t)}{\sin(t)} \sim \frac{t \times 1}{t} = 1 \qquad \text{quand } t \text{ tend vers } 0.$$

On en déduit que $\varphi(t)$ tend vers 1 quand t tend vers 0.

---

6. Soit t dans $]0, \pi/2]$. Les variations de la fonction φ donnent

$$0 \leqslant t\,\mathrm{cotan}(t) \leqslant 1, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Par ailleurs, on trouve

$$\mathrm{cotan}^2(t) + 1 = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\sin^2(t)} = \frac{1}{\sin^2(t)}.$$

L'inégalité $0 < \sin(t) \leqslant t$ donne alors

$$\frac{1}{\sin^2(t)} \geqslant \frac{1}{t^2} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{cotan}^2(t) \geqslant \frac{1}{t^2} - 1.$$

---

7. Des questions précédentes, on tire l'encadrement

$$\frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \leqslant \frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

puis

$$\frac{\pi^2}{3} \times \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3} \times \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}.$$

Cet encadrement est valable pour tout entier n strictement positif. Le majorant et le minorant tendent tous deux vers $\pi^2/6$ quand n tend vers $+\infty$. Le principe des gendarmes donne donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. On suppose que F est stable par A. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{F}^{\perp}$.

Prenons V dans F. Le produit scalaire de $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}$ par V s'écrit

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}|\mathrm{V}) = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{V} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{V} = (\mathrm{U}|\mathrm{A} \cdot \mathrm{V}).$$

La stabilité de F par A donne que $\mathrm{A} \cdot \mathrm{V}$ est dans F, donc $(\mathrm{U}|\mathrm{A} \cdot \mathrm{V}) = 0$ donc $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}|\mathrm{V}) = 0$.

C'est vrai pour tout V dans F donc $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U}$ est dans $\mathrm{F}^{\perp}$.
C'est vrai pour tout U dans $\mathrm{F}^{\perp}$ donc $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par A^{T}.

Réciproquement, on suppose que $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par A^{T}. On en déduit que $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp}$ est stable par $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, c'est-à-dire que F est stable par A.

On a montré que la stabilité de F par A équivaut à celle de $\mathrm{F}^{\perp}$ par A^{T}.

Exercice 3. a. On commence par repérer l'identité

$$f(a,b) = ||\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{n})||^2.$$

Quand le couple (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, le vecteur $a\vec{x} + b\vec{n}$ décrit le plan F. On cherche donc ici à minimiser $||\vec{y} - \vec{z}||^2$ lorsque le vecteur $\vec{z}$ décrit le plan F. On sait que ce minimum est réalisé lorsque $\vec{z}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\vec{y}$ sur ce plan.

---

b. On commence par trouver une base orthogonale de F. On prend $\vec{n}$ comme premier vecteur. On sait alors qu'on le complète en une base orthogonale de F en lui adjoignant le vecteur

$$\vec{w} = \vec{x} - \frac{(\vec{x}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})}\vec{n}.$$

Remarquons l'égalité

$$\frac{(\vec{x}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} x_k = \bar{x}.$$

Le choix de $\vec{w}$ se réécrit donc

$$\vec{w} = \vec{x} - \bar{x}\vec{n}.$$

Le projeté orthogonal de $\vec{y}$ sur F, noté $\vec{z}$, est alors

$$\vec{z} = \frac{(\vec{y}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})}\vec{n} + \frac{(\vec{y}|\vec{w})}{(\vec{w}|\vec{w})}\vec{w}.$$

On trouve de même

$$\frac{(\vec{y}|\vec{n})}{(\vec{n}|\vec{n})} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} y_k = \bar{y}.$$

En exploitant le fait que les vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ sont orthogonaux à $\vec{w}$, on trouve également

$$(\vec{y}|\vec{w}) = (\vec{y} - \vec{n}|\vec{w}) = (\vec{y} - \bar{y}\vec{n}|\vec{x} - \bar{x}\vec{n}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}(y_k - \bar{y})(x_k - \bar{x}) = \mathrm{N}c_{x,y}.$$

On trouve enfin

$$(\vec{w}|\vec{w}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}(x_k - \bar{x})^2 = \mathrm{N}v_x$$

donc

$$\vec{z} = \bar{y}\vec{n} + \frac{c_{x,y}}{v_x}\vec{w} = \left(\bar{y} - \frac{c_{x,y}}{v_x}\bar{x}\right)\vec{n} + \frac{c_{x,y}}{v_x}\vec{x}.$$

Au passage, on a la réponse à la question suivante, que je zappe donc.

---

d. Pour ce code, je me suis autorisé l'emploi de la fonction `sum` de Python ainsi que l'écriture des listes par compréhension.

```python
def coefs_regression(x, y):
    """
        -> (a, b)
    """
    n = len(x)
    m_x = sum(x) / n                              # Moyenne de x
    m_y = sum(y) / n                              # Moyenne de y
    m_x2 = sum([xi**2 for xi in x]) / n           # Moyenne de x**2
    sigma_xx = m_x2 - m_x**2                      # Variance de x
    m_xy = sum([x[i]*y[i] for i in range(n)]) / n # Moyenne de x*y
    sigma_xy = m_xy - m_x*m_y                     # Covariance(x, y)
    a = sigma_xy / sigma_xx
    b = m_y - a*m_x
    return (a, b)
```

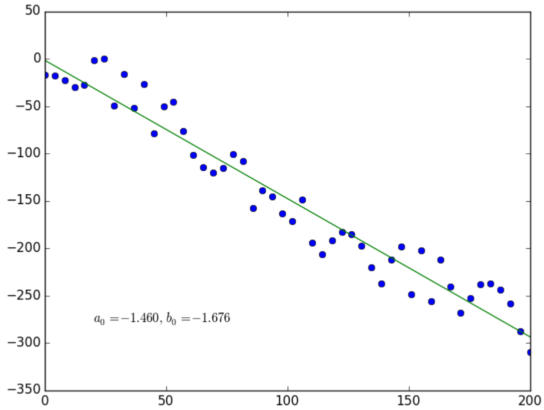
Voici maintenant un code pour représenter graphiquement un nuage de points et sa droite de régression. Le graphique inclus l'affichage du couple (a_0, b_0). Pour tester cette fonction, j'ai ensuite créé un nuage de points en perturbant une équation de droite par un terme sinusoïdal bricolé artisanalement.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def representation(nuage):
    """
        (liste_x, liste_y) ->
        affichage du nuage et de la droite de régression.
    """
    x, y = nuage
    a, b = coefs_regression(x, y)
    y_droite = [a*xi+b for xi in x]
    # Affichage du nuage de points
    plt.plot(x, y, 'bo')    # 'bo' = ronds bleus.
    # Affichage de la droite
    x_min = min(x)
    x_max = max(x)
    x_droite = [x_min, x_max]
    y_droite = [a*x_min+b, a*x_max+b]
    plt.plot(x_droite, y_droite, color='green')
    # Affichage des paramètres a et b
    y_min = min(y)
    y_max = max(y)
    x_text = .9*x_min + .1*x_max
    if a>0:        # Détermination de la position d'affichage des paramètres
        y_text = .1*y_min + .9*y_max
    else:
        y_text = .9*y_min + .1*y_max
    plt.text(x_text, y_text, r'$a_0={0:.3f}, \ b_0={1:.3f}$'.format(a, b))
    plt.show()

## Test sur un nuage fabriqué sur mesure

n = 50
x_min = 0
x_max = 200
aa = -1.5
bb = 2
x = np.linspace(x_min, x_max, n)
y = aa*x + bb
y = y + np.cos(y)*aa*10 - np.cos(y**2-np.pi/4)*aa*17
nuage = x, y
representation(nuage)
```



Voici le résultat graphique

Exercice 4. a. La fonction nulle f_0 vérifie l'identité

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_0(x) = 0 \times x$$

donc c'est un germe de fonction linéaire.

Soient f et g deux germes de fonctions linéaires ainsi qu'un élément λ de $\mathbb{R}$. Il existe $r > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [-r, r], \quad f(x) = c \times x$$

ainsi que $s > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [-s, s], \quad g(x) = d \times x.$$

Posons $t = \min(r, s)$. C'est un nombre strictement positif pour lequel on a

$$\forall x \in [-t, t], \quad (f + \lambda g)(x) = (c + \lambda d) \times x$$

donc la fonction $f + \lambda g$ est un germe de fonction linéaire.

On a alors montré que l'ensemble des germes de fonctions linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

b. Prenons $r > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [-r, r], \quad f(x) = c \times x.$$

La série $\sum u_n$ est convergente donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Il existe donc un entier n_r tel que

$$\forall n \geqslant n_r, \quad |u_n| \leqslant r.$$

On en déduit l'égalité

$$\forall n \geqslant n_r, \quad f(u_n) = c \times u_n,$$

si bien que la série de terme général $f(u_n)$ est convergente.

---

c. On procède comme dans le devoir précédent, mais en tenant compte des limitations au segment $[-s, s]$.

Étape 1. L'égalité $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donne $f(0) = 0$.

Étape 2. Pour tout x dans $[-s, s]$, l'identité $f(x) + f(-x) = f(0)$ donne $f(-x) = -f(x)$. La restriction de f à $[-s, s]$ est impaire.

Étape 3. Prenons un élément x de $[-s, s]$. Pour tout n de $\mathbb{Z}$ tel que $|nx| \leqslant s$, on observe l'égalité $f((n + 1)x) = f(nx) + f(x)$.

En itérant cette relation de récurrence, qui est celle d'une suite arithmétique, on obtient $f(nx) = nf(x)$ pour tout entier n tel que $|nx| \leqslant s$.

Étape 4. Prenons un nombre rationnel q tel que $|q| \leqslant 1$. Il existe alors deux entiers a et $b \neq 0$ tels que $q = a/b$.

On observe alors les égalités $f(qs) = f(as/b) = af(s/b)$ et $f(s) = bf(s/b)$ donc $f(qs) = (a/b)f(s) = qf(s)$.

Étape 5. Soit $x \in [0, s]$. Posons $z = x/s$, de manière à avoir $z \in [0, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $z_n = \lfloor nz \rfloor / n$. La suite $(z_n)_{n \geqslant 1}$ est à valeurs rationnelles dans $[0, 1]$, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(z_n s) = z_n f(s).$$

La suite $(z_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers z, ce qui donne, en exploitant la continuité de f en 0, l'égalité $f(zs) = zf(s)$, qui se réécrit

$$f(x) = x \times \frac{f(s)}{s}.$$

Par imparité de f, l'égalité $f(x) = xf(s)/s$ est valable pour tout x dans $[-s, s]$. La fonction f est donc un germe de fonction linéaire.

Exercice 5. 1. La série $\sum 0$ converge donc la série $\sum f(0)$ converge. La constante $f(0)$ ne peut donc valoir que 0.

2.a. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{V_N}$ la somme partielle $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} v_n$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\mathrm{V}_{2p+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_{2p} = u_p.$$

Les suites $(\mathrm{V}_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{V}_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers 0 donc il en va de même pour la suite $(\mathrm{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
La série de terme v_n est donc convergente.

2.b. La série de terme général $f(v_n)$ est donc convergente, si bien que la suite $(f(v_n))_{n \geqslant 0}$ tend vers 0. La suite $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ en est une suite extraite, donc elle tend vers 0.

2.c. On a prouvé que f envoie toute suite de limite nulle sur une suite de limite nulle donc, par le critère séquentiel, la fonction f est continue en 0.

3.a. L'hypothèse que f ne soit pas un germe de fonction impaire s'écrit comme suit

$$\forall t > 0, \quad \exists x \in [-t, t], \quad f(x) + f(-x) \neq 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir u_n dans $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ tel que $f(u_n) + f(-u_n) \neq 0$.
La domination $|u_n| \leqslant 2^{-n}$ montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.b et 3.c (oups) et 3.d. Pour tout $k \in \mathbb{N}\mathbb{N}$, posons

$$s(k) = \sum_{i=0}^{k} m(i).$$

Comme en 2.a, les sommes partielles V_{2p+1} sont nulles et les sommes partielles V_{2p} sont de la forme u_j pour un certain j entier. Plus précisément, si l'entier p est dans $[\![s(k), s(k+1) - 1]\!]$, alors V_{2p} vaut u_k.

Prenons maintenant $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un rang $k(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geqslant k(\varepsilon), \quad |u_n| \leqslant \varepsilon.$$

On obtient alors l'inégalité

$$\forall p \geqslant s(k(\varepsilon)), \quad |\mathrm{V}_{2p}| \leqslant \varepsilon.$$

L'inégalité $|\mathrm{V}_{2p+1}| \leqslant \varepsilon$ est également vérifiée pour ces mêmes valeurs de p, ce qui donne

$$\forall n \geqslant 2s(k(\varepsilon)), \quad |\mathrm{V}_n| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors prouvé ceci
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon, \quad |\mathrm{V}_n| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0, ce qui signifie que la série de terme général v_n converge.

Maintenant, on en censé en déduire que la série de terme général $f(v_n)$ est convergente, mais on va voir que c'est impossible. Notons W_N les sommes partielles de cette série. On obtient alors

$$\mathrm{W}_{2s(k)-1} - \mathrm{W}_{2s(k-1)-1} = \sum_{i=2s(k-1)}^{2s(k)-1} v_i = m(k) \times (f(u_k) + f(-u_k)).$$

Ceci est minoré par 1 en valeur absolue donc cette différence ne tend pas vers 0 quand k tend vers ∞. Il est donc impossible que la suite $(\mathrm{W}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

On a obtenu une contradiction, qui prouve que f est un germe de fonction impaire.

---

4. De la même manière, on suppose qu'un tel s n'existe pas, ce qui donne, en exploitant le résultat de la question 3,

$$\forall s \in]0, t], \quad \exists (x, y) \in [-s, s]^2, \quad f(x + y) + f(-x) + f(-y) \neq 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit alors (x_n, y_n) dans $[-s2^{-n}, s2^{-n}]$ tel que $f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n) \neq 0$ ainsi qu'un entier $m(n)$ tel que
$$m(n) \times |f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n)| \geqslant 1.$$

On définit alors une suite réelle v comme suit : les $3m(0)$ premiers termes sont $(x_0+y_0, -x_0, -y_0)$, les $3m(1)$ termes suivants sont $(x_1 + y_1, -x_1, -y_1)$ et ainsi de suite.

Un raisonnement en tous points analogue à celui de la question 3 aboutit à une contradiction. On a alors prouvé par l'absurde l'existence de $s > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [-s, s]^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

---

5. D'après 2.c et 4, on peut se référer à la question c de l'exercice 4 et conclure que f est un germe de fonction linéaire.

Exercice 6. On prend $s_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $s_n = 1$ si la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n-1} s_n u_n$ est négative et $s_n = -1$ dans le cas contraire.

Pour la suite, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s_n u_n$.

Fait 1. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ change de signe une infinité de fois.

Démonstration du fait 1. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il n'y a qu'un nombre fini de changements de signe. Il existe donc un indice n_0 à partir du quel la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Pour simplifier, supposons que pour tout entier $n \geqslant n_0$, le terme s_n soit égal à -1.

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant n_0 - 1$, la somme partielle S_n est positive. Pour tout entier $n \geqslant n_0 - 1$, on a alors
$$\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = s_{n+1}u_{n+1} = -u_{n+1} \leqslant 0.$$

La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante, minorée par 0, donc elle est convergente. Ainsi, la série de terme général $s_n u_n$ est convergente. Cependant, ce terme général vaut $-u_n$ à partir d'un certain rang donc cela contredit la divergence de la série de terme général u_n.

Cette contradiction prouve que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ change de signe une infinité de fois. Il existe donc une suite $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs, strictement croissante, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait les égalités

$$\forall i \in [\![\varphi(k), \varphi(k+1) - 1]\!], \quad s_i = (-1)^k.$$

Fait 2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a l'inégalité $|\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}| \leqslant u_{\varphi(k)-1}$.

Démonstration du fait 2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le nombre $s_{\varphi(k)}$ vaut $(-1)^k$ donc la somme partielle $\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}$ a le signe de $(-1)^{k+1}$. Le nombre $s_{\varphi(k)-1}$ vaut $(-1)^{k-1}$ donc la somme partielle $\mathrm{S}_{\varphi(k)-2}$ a le signe de $(-1)^k$. On en déduit que l'ajout de $(-1)^{k-1}u_{\varphi(k)-1}$ a engendré un changement de signe de la somme partielle, ce qui donne en particulier

$$u_{\varphi(k)-1} = |\mathrm{S}_{\varphi(k)-2}| + |\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}| \qquad \text{puis} \qquad |\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}| \leqslant u_{\varphi(k)-1}.$$

Fait 3. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui conclut notre quête.

Démonstration du fait 3. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite nulle donc il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, ce qui donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(k) \geqslant k.$$

Ainsi, pour tout entier $k \geqslant n_0 + 1$, on obtient la majoration

$$|\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}| \leqslant u_{\varphi(k)-1} \leqslant \varepsilon.$$

Prenons un entier $k \geqslant n_0 + 1$ et un entier n dans $[\![\varphi(k) - 1, \varphi(k+1) - 2]\!]$. On passe de $\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}$ à S_n en ajoutant des termes de signe opposé à celui de $\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}$ et on sait que S_n est de même signe que $\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}$ donc $|\mathrm{S}_n| \leqslant |\mathrm{S}_{\varphi(k)-1}| \leqslant \varepsilon$.

On a alors démontré ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant m_0, \quad |\mathrm{S}_n| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Autrement dit, la série de terme général $s_n u_n$ est convergente, de somme nulle.