PC* — mathématiques **jeudi 10 octobre 2019**
Devoir surveillé n° 2 **durée : 4 heures**

Exercice préliminaire — lemme de Riemann-Lebesgue

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes. Pour tout x réel, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}t.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction F admet une limite nulle en $+\infty$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une constante C (indépendante de x) telle que

$$\forall x > 0, \quad |\mathrm{F}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{x}.$$

b. Conclure.

Problème I — réarrangement de termes d'une série

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Partie I — constante d'Euler

Dans cette partie, on obtient un développement asymptotique de H_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$.

Question 1. Montrer que la série de terme général $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ est absolument convergente.

Question 2. En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

La limite de cette suite est notée γ (c'est la *constante d'Euler*).

Les dernières questions de cette partie sont une digression autour de la constante d'Euler et sont indépendantes des parties ultérieures de ce problème.

Question 3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, \mathrm{d}t$ est convergente. Sa valeur est notée I.

Question 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une expression de $\displaystyle\int_1^{n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, \mathrm{d}t$ en fonction de γ_n.

Question 5. En déduire une expression de I en fonction de γ.

Partie II — calcul d'une somme alternée

Question 6. Rappeler l'énoncé du théorème des séries alternées.

Question 7. Justifier que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Question 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la relation $\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_n$.

Question 9. En déduire une expression de S_{2n} en fonction de γ_n et de γ_{2n}.

Question 10. En déduire l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Partie III — réarrangement de la somme précédente

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad u_{3p+1} = -\frac{1}{2p+1}, \quad u_{3p+2} = \frac{1}{4p+2}, \quad u_{3p+3} = \frac{1}{4p+4}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{U}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Question 11. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $\mathrm{U}_{3\mathrm{N}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{S}_{2\mathrm{N}}$.

Question 12. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente et donner la valeur de sa somme.

Question 13. Construire une fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective telle que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_{\varphi(k)}$ soit la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

Commenter.

Partie IV — réarrangement des séries absolument convergentes

On considère une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum z_n$ est absolument convergente. Le but de cet partie est de prouver que pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum z_{\varphi(n)}$ converge absolument et qu'elle a la même somme que la série $\sum z_n$.

On considère donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et on pose $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

Question 14. Prouver qu'il existe un entier n_0 vérifiant la propriété

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Question 15. Prouver qu'il existe un entier n_1 tel que l'inclusion

$$[\![0, n_0]\!] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

Question 16. Pour tout entier $n \geqslant n_1$, prouver la majoration

$$\left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Question 17. Conclure.

Problème II — calcul d'une somme de série

Le but de ce problème est de montrer que pour tout x dans $]0, 2\pi[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}$ est convergente et de calculer sa somme.

Pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{E}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}.$$

On pourra utiliser librement le résultat de l'exercice préliminaire ainsi que celui de la question 10.

Question 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de E_n' sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Question 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, démontrer l'égalité

$$\mathrm{E}_n(x) = \mathrm{E}_n(\pi) + \int_\pi^x \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t - \mathrm{i} \int_\pi^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t.$$

Question 20. Soit $x \in]0, 2\pi[$. À l'aide de l'astuce de l'angle moitié, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t$.

Question 21. Conclure.

Problème III — polynômes de Laguerre

Dans ce problème, on étudie une famille de polynômes orthogonale pour un certain produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on introduit les fonctions

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h_n^{(n)}(t) \times \mathrm{e}^t. \end{array} \tag{1}$$

Question 22. Pour tout entier n, montrer que l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \tag{2}$$

existe et qu'elle vaut $n!$.

Question 23. En déduire que pour tout polynôme réel P, la fonction

$$t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t} \tag{3}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Question 24. Montrer que la fonction $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Question 25. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Leibniz, obtenir une expression de la fonction L_n. En déduire que cette fonction est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on note encore L_n le polynôme dont L_n est la fonction associée.

Question 26. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Écrire le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n. En déduire que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, le nombre $h_n^{(k)}(0)$ est nul.

Question 27. Soient n dans $\mathbb{N}$ et P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour tout entier p compris entre 0 et n, prouver l'égalité

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t)\, \mathrm{P}^{(p)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Question 28. Sous l'hypothèse $\deg(\mathrm{P}) < n$, montrer l'égalité $(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = 0$.

Question 29. En déduire que la famille $(\mathrm{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire introduit plus haut.

Question 30. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. À l'aide du polynôme L_n, exprimer le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
En déduire la valeur de

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right)^2 \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\ ;\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{6}$$
