PC* — mathématiques **jeudi 10 octobre 2019**
Corrigé du devoir surveillé nº 2

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques nº 2

Exercice préliminaire

a. Soit $x > 0$. On intègre par parties. On dérive la fonction f, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, et on primitive $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$ en $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}/(\mathrm{i}x)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.

On obtient

$$\mathrm{F}(x) = \frac{f(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xb} - f(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa}}{\mathrm{i}x} - \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

On en tire la majoration

$$|\mathrm{F}(x)| \leqslant \frac{1}{x}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right),$$

ce qui est bien de la forme $|\mathrm{F}(x)| \leqslant \text{constante}/x$.

---

b. Le théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\mathrm{F}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Problème I

Question 1. Soit un entier $n \geqslant 2$. Le calcul donne $\gamma_n - \gamma_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - 1/n)$ donc

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que la série de terme général $1/n^2$ converge. On en déduit que la série de terme général $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

Question 2. La convergence de la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 2}(\gamma_n - \gamma_{n-1})$ donne la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Question 3. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et on observe l'encadrement

$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente aussi.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La linéarité de l'intégrale donne

$$\int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(n) - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles donne ensuite

$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{k}{t^2} = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}.$$

Avec le décalage d'indice $\ell = k + 1$, on en tire la relation

$$\int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(n) - \sum_{\ell=2}^{n}\frac{1}{\ell} = 1 - \gamma_n.$$

Question 5. En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\mathrm{I} = 1 - \gamma$.

Question 6. Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite réelle décroissante, de limite nulle.

Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_0$, le nombre $\sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n u_n$ a le signe de $(-1)^{\mathrm{N}}$.

Enfin, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_0$, on a la majoration $\left| \sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leqslant u_{\mathrm{N}}$.

Question 7. La suite $(1/n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante, de limite nulle, donc la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge (théorème des séries alternées).

Question 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 + (-1)^k}{k}.$$

La somme $1 + (-1)^k$ est nulle si k est impair et vaut 2 sinon. Il reste donc

$$\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{S}_{2n} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{2}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{2p} = \mathrm{H}_n.$$

Question 9. On part de $\mathrm{H}_n = \gamma_n + \ln(n)$ et $\mathrm{H}_{2n} = \gamma_{2n} + \ln(2n)$, ce qui donne

$$\mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_n - \mathrm{H}_{2n} = \gamma_n - \gamma_{2n} - \ln(2).$$

Question 10. La différence $\gamma_n - \gamma_{2n}$ tend vers 0 et S_{2n} tend vers la somme de la série des $(-1)^n/n$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$

Question 11. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On sépare les indices selon leur reste modulo 3.

$$\mathrm{U}_{3\mathrm{N}} = (u_1 + u_4 + \cdots + u_{3\mathrm{N}-2}) + (u_2 + u_5 + \cdots + u_{3\mathrm{N}-1}) + (u_3 + u_6 + \cdots + u_{3\mathrm{N}}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_{3k-2} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_{3k-1} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_{3k}.$$

Pour un indice k donné, on obtient

$$u_{3k-2} + u_{3k-1} + u_{3k} = -\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} = -\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right),$$

ce qui donne

$$\mathrm{U}_{3\mathrm{N}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{S}_{2\mathrm{N}}.$$

Question 12. On en déduit que la suite $(\mathrm{U}_{3\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-\ln(2)/2$.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, observons les relations

$$\mathrm{U}_{3\mathrm{N}+1} = \mathrm{U}_{3\mathrm{N}} - \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_{3\mathrm{N}+2} = \mathrm{U}_{3\mathrm{N}+1} + \frac{1}{4\mathrm{N}+2}.$$

On en déduit que les suites $(\mathrm{U}_{3\mathrm{N}+1})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{U}_{3\mathrm{N}+2})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ convergent également vers $-\ln(2)/2$.

Ces trois sous-suites convergent vers une même limite donc la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers cette même limite. Ainsi, la série de terme général u_n est convergente et sa somme vaut $-\ln(2)/2$.

Question 13. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons

$$\psi(3p+1) = 2p+1, \quad \psi(3p+2) = 4p+2, \quad \psi(3p+3) = 4p+4.$$

On a alors défini une fonction ψ de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$. On observe que chaque entier impair possède exactement un antécédent (l'antécédent de $2p+1$ est $3p+1$). Les entiers pairs strictement positifs sont de deux sortes : les multiples de 4 strictement positifs et les doubles d'entiers impairs, ce qui revient à dire les nombres des formes $4(p+1)$ et les nombres de la forme $4p+2$; on observe que eux aussi ont exactement un antécédent par ψ.
La fonction ψ est donc une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

On remarque alors que pour chacun des trois types de valeurs de k, on a

$$u_k = \frac{(-1)^{\psi(k)}}{\psi(k)}.$$

En notant φ la bijection réciproque de ψ, on a alors

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad u_{\varphi(\ell)} = \frac{(-1)^\ell}{\ell}.$$

La série $\sum\limits_{\ell\geqslant 1} u_{\varphi(\ell)}$ est donc la série $\sum\limits_{\ell\geqslant 1} \dfrac{(-1)^\ell}{\ell}$, dont la somme vaut $-\ln(2)$.

On voit là qu'il est possible, en modifiant l'ordre de sommation des termes d'une série convergente, de modifier sa somme.

Question 14. La série $\sum |z_k|$ converge. On sait que la suite de ses restes tend vers 0. Ses restes sont donc majorés par $\varepsilon/2$ à partir d'un certain rang.

Question 15. Il suffit de choisir

$$n_1 = \max\left\{\varphi^{-1}(0), \dots, \varphi^{-1}(n_0)\right\}.$$

Question 16. Soit un entier $n \geqslant n_1$. Parmi les entiers $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$, on sait qu'il se trouve les entiers de 0 à n_0. Notons les autres entiers

$$m_{n_0+1}, \dots, m_n$$

dans un ordre quelconque. Ce qui importe, c'est que ces entiers sont forcément strictement supérieurs à n_0. On obtient alors

$$\mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} = \mathrm{S} - \sum_{j=0}^{n_0} z_j - \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{m_i} = \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} z_j - \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{m_i}.$$

L'inégalité triangulaire donne ensuite

$$\left|\mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)}\right| \leqslant \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |z_j| + \sum_{i=n_0+1}^{n} |z_{m_i}|.$$

Les m_i sont des entiers distincts strictement supérieurs à n_0 donc

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} |z_{m_i}| \leqslant \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |z_j|.$$

On obtient donc

$$\left|\mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)}\right| \leqslant 2 \times \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |z_j| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'inégalité de la première question.

Question 17. On a prouvé ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_1, \qquad \left|\mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc prouvé que la série de terme général $z_{\varphi(k)}$ est convergente et que sa somme vaut S.

Problème II

Question 18. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, on obtient

$$\mathrm{E}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

On reconnaît une somme géométrique finie. Sa raison vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, ce qui est différent de 1 d'après l'hypothèse sur x. Il vient

$$\mathrm{E}_n'(x) = \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

Question 19. Soit $x \in]0, 2\pi[$. On applique le théorème fondamental de l'intégration puis la linéarité de l'intégrale.

$$\mathrm{E}_n(x) - \mathrm{E}_n(\pi) = \int_{\pi}^{x} \mathrm{E}_n'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x} \left(\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)\ \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t - \mathrm{i} \int_{\pi}^{x} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t.$$

Question 20. Soit t dans le segment délimité par π et x. L'astuce de l'angle moitié donne

$$\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}{-2\sin(t/2)} = -\frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}. - \frac{\mathrm{i}}{2}.$$

On en tire l'égalité

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t = [-\ln(\sin(t/2))]_{\pi}^{x} - \frac{\mathrm{i}}{2}(x - \pi) = -\ln(\sin(x/2)) + \mathrm{i}\frac{\pi - x}{2}.$$

Question 21. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment délimité par π et x. Le lemme de Riemann-Lebesgue permet d'en déduire que

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$\mathrm{E}_n(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

donc ce terme tend vers $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que quand n tend vers $+\infty$, la somme partielle $\mathrm{E}_n(x)$ tend vers $-\ln(2) - \ln(\sin(x/2)) + \mathrm{i}\frac{\pi - x}{2}$.

On a alors prouvé que la série de terme général $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/k$ est convergente et que sa somme vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/k = -\ln(2\sin(x/2)) + \mathrm{i}\frac{\pi - x}{2}.$$

Problème III

Question 22. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons P_n la proposition « l'intégrale I_n existe et vaut $n!$ ».

L'intégrale I_0 s'écrit $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour tout $a > 0$, on trouve

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-a} + 1.$$

Ceci tend vers 1 quand a tend vers $+\infty$. Ainsi, l'intégrale I_0 existe et vaut 1, c'est-à-dire $0!$. La proposition P_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition P_n est vraie. Prenons $a > 0$. Intégrons par parties.
On dérive la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) en $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$. On primitive la fonction $t \mapsto t^n$ en $t \mapsto t^{n+1}/(n+1)$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$).
On obtient

$$\int_0^a t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [t^{n+1}(-\mathrm{e}^{-t})]_0^a + \int_0^a (n+1)t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -a^{n+1}\mathrm{e}^{-a} + (n+1)\int_0^a t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Quand a tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $(n+1) \times \mathrm{I}_n$, c'est-à-dire vers $(n+1)!$. Ainsi, l'intégrale I_{n+1} existe et vaut $(n+1)!$. La proposition P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout entier n, l'intégrale I_n existe et vaut $n!$.

Question 23. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et on vient de voir que son intégrale sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est convergente. Cette fonction est donc intégrable sur $[0, +\infty[$.
Prenons maintenant un polynôme réel P. La fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ donc elle est également intégrable sur $[0, +\infty[$.

Question 24. On remarque déjà que la fonction $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto (\mathrm{P}|\mathrm{Q})$ est bien définie, qu'elle est à valeurs réelles et qu'elle est symétrique. On montre ensuite par exemple qu'elle est linéaire à gauche (en s'appuyant sur la linéarité de l'intégrale) et on en déduit, avec le caractère symétrique, qu'elle est bilinéaire.
On remarque ensuite qu'elle est positive.

Prenons maintenant un polynôme réel P pour lequel le nombre $(\mathrm{P}|\mathrm{P})$ est nul. La fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est alors continue, positive, d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc elle est identiquement nulle. Le polynôme P admet donc pour racines tous les éléments de $[0, +\infty[$. Il admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

On a alors montré que $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. C'est donc un produit scalaire.

Question 25. Notons g_n la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{n!}$. Ses dérivées successives sont données par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_n^{(k)}(t) = \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Quant à la fonction $h_0 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, ses dérivées successives sont données par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad h_0^{(k)}(t) = (-1)^k\mathrm{e}^{-t}. \tag{3}$$

La formule de Leibniz donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h_n^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_n^{(n-k)}(t) h_0^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^k}{k!} \mathrm{e}^{-t} \tag{4}$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{L}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^k}{k!}. \tag{5}$$

On constate que L_n est une fonction polynomiale. Son degré vaut n et son coefficient dominant vaut $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Question 26. On voit que $h_n(t)$ est équivalent à $t^n/n!$ quand n tend vers 0. Le développement limité demandé est donc

$$h_n(t) = \frac{t^n}{n!} + \mathrm{o}(t^n). \tag{6}$$

D'autre part, ce développement limité est donné par la formule de Taylor-Young

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h_n^{(k)}(0)}{k!} t^k + \mathrm{o}(t^n). \tag{7}$$

L'unicité du développement limité permet d'en déduire que pour tout entier k dans $[\![0, n-1]\!]$, le nombre $h_n^{(k)}(0)$ est nul.

Question 27. C'est parti pour une nouvelle récurrence. Pour tout entier p compris entre 0 et n, notons C_p l'égalité à démontrer.

L'égalité C_0 s'écrit

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)\mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{L}_n(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Cette égalité est vraie.

Prenons maintenant un entier p dans $[\![0, n-1]\!]$ et supposons que l'égalité C_p est vraie. Prenons $a > 0$ et effectuons une intégration par parties. On dérive $\mathrm{P}^{(p)}$ et on primitive $h_n^{(n-p)}$.

$$\int_0^a h_n^{(n-p)}(t)\mathrm{P}^{(p)}(t)\ \mathrm{d}t = h_n^{(n-p-1)}(a)\mathrm{P}^{(p)}(a) - h_n^{(n-p-1)}(0)\mathrm{P}^{(p)}(0) - \int_0^a h_n^{(n-p-1)}(t)\mathrm{P}^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{9}$$

L'entier $n-p-1$ est compris entre 0 et $n-1$ donc le nombre $h_n^{(n-p-1)}(0)$ est nul. On pourrait exprimer $h_n^{(n-p-1)}$ de la même manière qu'on a calculé $h_n^{(n)}$ à la question 4. On verrait alors que cette fonction est de la forme $t \mapsto \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}$ pour un certain polynôme réel Q.

Le terme tout intégré s'écrit donc $\mathrm{e}^{-a}\mathrm{Q}(a)\mathrm{P}^{(p)}(a)$. Les croissances comparées montrent que ce terme a une limite nulle quand a tend vers $+\infty$.

On trouve donc

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a h_n^{(n-p-1)}(t)\mathrm{P}^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t)\mathrm{P}^{(p)}(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^{p+1}(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}). \tag{10}$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p-1)}(t)\mathrm{P}^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t$ existe et elle vaut $(-1)^{p+1}(\mathrm{L}_n|\mathrm{P})$. L'égalité C_{p+1} est prouvée.

Par une récurrence finie, on a montré que l'égalité $(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t)\mathrm{P}^{(p)}(t)\ \mathrm{d}t$ est valable pour tout entier compris entre 0 et p.

Question 28. On fait maintenant l'hypothèse $\deg(\mathrm{P}) < n$, ce qui donne $\mathrm{P}^{(n)} = 0$ puis

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n(t)\mathrm{P}^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Question 29. Prenons deux entiers k et n tels que $k < n$. Le polynôme L_k est de degré k strictement inférieur à n donc le produit scalaire $(\mathrm{L}_k|\mathrm{L}_n)$ est nul.

La famille $(\mathrm{L}_k)_{k\geqslant 0}$ est orthogonale.

Prenons maintenant le cas particulier $\mathrm{P} = \mathrm{L}_n$ et prenons $p = n$. La formule de la question 26 donne

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{L}_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n(t)\mathrm{L}_n^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{11}$$

Le polynôme $\mathrm{L}_n^{(n)}$ est constant, égal à $n!$ multiplié par le coefficient dominant de L_n, ce qui fait $(-1)^n$. Il reste donc

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{L}_n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t. \tag{12}$$

D'après le résultat de la question 22, on trouve donc $(\mathrm{L}_n|\mathrm{L}_n) = 1$. On l'a du moins démontré pour tout entier n strictement positif.

Remarquons que le polynôme L_0 est le polynôme constant 1. On trouve donc

$$(\mathrm{L}_0|\mathrm{L}_0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1. \tag{13}$$

Finalement, la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\geqslant 0}$ est orthonormale.

Question 30. On a vu à la question 28 que L_n est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Reprenons la formule donnant L_n.

$$\mathrm{L}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k\frac{\mathrm{X}^k}{k!}. \tag{14}$$

On en déduit la décomposition

$$\mathrm{X}^n = \underbrace{(-1)^n n!\mathrm{L}_n}_{\text{orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]} + \underbrace{(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}}_{\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}. \tag{15}$$

En particulier, le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est le polynôme $\mathrm{X}^n - (-1)^n n!\mathrm{L}_n$.

Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On peut remarquer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left|\left|\mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\mathrm{X}^k\right|\right|^2, \tag{16}$$

où l'on a noté $||\ ||$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. La borne inférieure cherchée s'écrit donc

$$\inf\left\{||\mathrm{X}^n - \mathrm{P}||^2\ ;\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\right\}. \tag{17}$$

On sait que cette borne inférieure est égale à $||\mathrm{X}^n - \mathrm{Q}_n||^2$, où Q_n est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. La borne inférieure cherchée vaut donc $||(-1)^n n!\mathrm{L}_n||^2$, c'est-à-dire $(n!)^2$.
