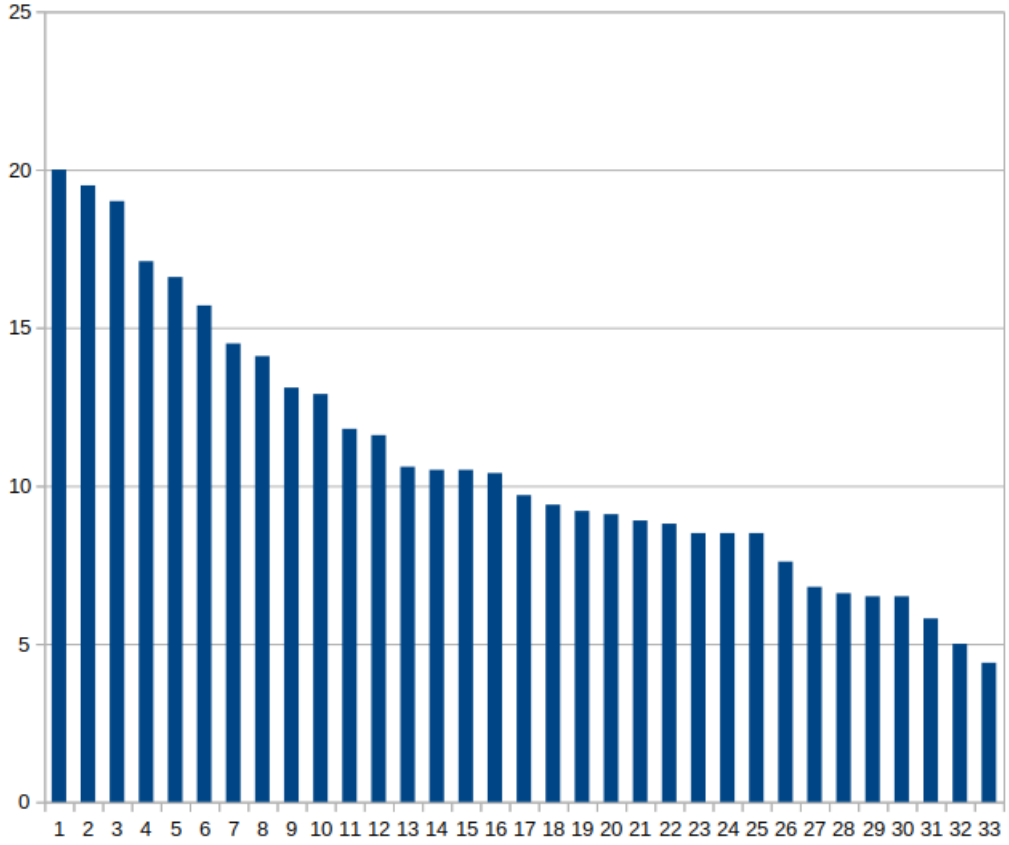
Compte rendu du devoir surveillé n° 2

Thèmes abordés. Séries numériques. Intégration. Produits scalaires.

La médiane se situe à 9,7, avec une moyenne à 10,84 et un écart-type de 4,23.



Exercice préliminaire

Le maximum de points réalisable sur ces deux questions est de 10. La moyenne de la classe sur cette partie est de 4,5. Cinq d'entre vous ont encaissé la totalité des points.

	Qa	Qb
Barème	2	0,5
Réussite	38,6 %	70,4 %

Question a. L'intégration par parties est généralement bien menée, mais la majoration laisse à désirer. L'inégalité triangulaire donne lieu parfois à des majorants qui ne sont pas forcément positifs, voire pas forcément réels. De manière général, des règles mystérieuses sont appliquées.

Mon conseil pour éviter ce genre d'erreurs de calcul est de se remémorer en quoi consistent les bonnes règles de calcul *sous forme littérale avec d'autres symboles que ceux de l'énoncé*, ce qui peut s'écrire ici par exemple

$$|z+w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{et} \qquad \left| \int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Ensuite, on prend soin de les appliquer rigoureusement.

Par ailleurs, il est essentiel de savoir que pour tout x réel, le module de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ vaut 1, sans quoi beaucoup de calculs sur les nombres complexes ne pourront pas aboutir.

Question b. Je m'explique mal que tout le monde n'ait pas eu tous les points à cette question de synthèse immédiate. N'allez pas chercher la difficulté là où elle n'est pas.

Problème I

Le maximum de points réalisable sur le problème I est de 90. La moyenne de la classe sur ce problème est de 29,89. Le meilleur total obtenu est de 61.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Barème	1	0,5	1	2,5	1	1	0,5	1	0,5	1
Réussite	75,0 %	62,1 %	60,6 %	23,5 %	21,1 %	60,6 %	86,0 %	79,5 %	93,9 %	91,3 %

Les questions 1 et 2 étaient des redites d'un point de cours. Le théorème sur les séries télescopiques n'est pas bien connu.

À la question 3, la fonction est souvent qualifiée de continue alors qu'elle ne l'est pas (à cause des discontinuités de la partie entière). C'est un des rares cas où on doit invoquer la continuité par morceaux.
La majoration par $1/t^2$ est généralement obtenue mais sans la positivité, cette domination ne sert à rien.

À la question 4, le découpage par la relation de Chasles est généralement effectué mais le calcul s'arrête parfois là, comme si la valeur de la partie entière sur $[k, k+1[$ n'était pas connue.

La question 5 est alors un simple passage à la limite, mais dans certaines copies, on trouve le moyen de chercher des complications inutiles : pas la peine de redémontrer l'existence de I.

La partie II est une quasi-redite de calculs effectués en classe et c'est de loin la mieux réussie du devoir. Je suis toutefois déçu par le manque de précision dans la connaissance (ou la restitution) du théorème des séries alternées.

	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17
Barème	1,5	1,5	2	0,5	2	3	2
Réussite	40,5 %	26,5 %	0,0 %	56,1 %	11,0 %	3,0 %	9,8 %

Il est étonnant que la question 11 n'ait pas été fréquemment abordée par récurrence, et encore plus surprenant que les quelques tentatives par récurrence aient moins bien fonctionné que les calculs directs.

À la question 12, il a bien été vu que la suite $(\mathrm{U}_{3\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ converge vers $-\ln(2)/2$, mais il est presque toujours été affirmé qu'on peut en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge alors que seule la réciproque est vraie.

La question 13 n'a pas été comprise. Elle était probablement mal formulée.

La partie IV était largement la plus difficile du devoir et c'est logiquement la moins réussie. Plusieurs d'entre vous ont affirmé en question 15 que la bijection φ est strictement croissante alors que la seule bijection croissante de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ est l'identité (je laisse la démonstration en exercice).
À la question 17, l'aspect « convergence absolue » a été zappé par tout le monde, y compris par moi dans mon corrigé. Je répare ici cet oubli.

Démonstration de la convergence absolue de la « série renumérotée ». Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{n} \left|z_{\varphi(k)}\right|.$$

La suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Étant donné un entier n, notons m_n le plus grand des nombres $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$. On a alors

$$\mathrm{T}_n \leqslant \sum_{j=0}^{m_n} |z_j| \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} |z_j|.$$

La suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 0}$ est donc majorée en plus d'être croissante. Elle est donc convergente, ce qui prouve que la série de terme général $z_{\varphi(k)}$ est absolument convergente.

Commentaire. Il est démontré ici que lorsqu'on a une série absolument convergente, on peut modifier sa numérotation sans que ça modifie sa somme, contrairement à ce qu'on a constaté dans une situation de semi-convergence à la partie III. Ce fait est crucial pour le cours de probabilité du mois de janvier.

Problème II

Le maximum de points réalisable sur le problème II est de 24. La moyenne de la classe sur ce problème est de 6,54. Le score maximal sur cet exercice est réalisé dans une seule copie.

	Q18	Q19	Q20	Q21
Barème	1,5	0,5	2	2
Réussite	28,8 %	28,4 %	37,1 %	15,9 %

À la question 18, la somme géométrique n'a pas toujours été reconnue. Quand elle a été reconnue, la condition d'application de la formule (raison différente de 1) n'a pas toujours été donnée. La formule a souvent été mal appliquée (oubli du premier terme de la somme en facteur).

Beaucoup d'erreurs de signe à la question 20. J'avais pris soin de signaler dans l'énoncé qu'il serait judicieux d'utiliser le théorème de l'exercice préliminaire, mais ça n'a été remarqué que par six d'entre vous. Ça montre qu'il reste encore beaucoup de travail pour savoir exploiter les indications d'un énoncé.

Problème III

Le maximum de points réalisable sur le problème III est de 80. La moyenne de la classe sur ce problème est de 25,2. Le meilleur score réalisé sur ce problème est de 77,75.

	Q22	Q23	Q24	Q25.a	Q25.b	Q25.c	Q25.d	Q26	Q27	Q28	Q29	Q30
Barème	2	1	2	1,5	0,5	0,5	0,5	2	3	1	2	4
Réussite	59,1 %	34,5 %	77,3 %	25,8 %	51,5 %	69,7 %	40,9 %	36,0 %	7,6 %	47,0 %	17,0 %	6,8 %

Réussite mitigée pour les questions 22, 23 et 24, pourtant très proches du cours.

J'ai observé plusieurs fois une erreur de méthode, qui consiste à ne pas passer à la limite après avoir effectué l'intégration par parties. Les gens qui ont tenté cette approche ont alors essayer d'accumuler les termes tout intégrés mais les formules proposées (improvisées) étaient systématiquement fausses.

Pour la notation, j'ai découpé en quatre parties la question 25. Pour appliquer la formule de Leibniz, il me semble préférable de la donner d'abord sous forme littérale puis de préciser quelles sont les dérivées successives des deux fonctions dans le produit.

En tout état de cause, il est inadmissible d'écrire des monstruosités comme $(t^n)^{(k)}$.

Beaucoup d'entre vous ont oublié le $n!$ au dénominateur dans le coefficient dominant.

Très peu de réussite à la question 27 : le point crucial était de justifier le passage à la limite en $+\infty$, ce qui n'a que rarement été fait proprement.

À la question 29, plusieurs d'entre vous ont montré l'égalité $(\mathrm{L}_k|\mathrm{L}_n) = 0$ sous l'hypothèse $k < n$ puis sous l'hypothèse $k > n$ alors que c'est absolument la même chose. De manière générale, évitez de faire un même travail en double.

La question 30 a été réussie dans deux copies seulement alors qu'elle a été abordée très souvent. Cette partie du cours sur les produits scalaires n'est toujours pas assimilée, alors qu'elle est primordiale.