

Exercice 1. (*) Pour tout polynôme réel P , écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$\|P\| = \sup_{0 \leq x \leq 1/2} |P(x)| \quad \text{et} \quad N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

- Prouver que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ et vers 1 pour la norme N .
- (**) Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X .

Solution partielle de l'exercice 1. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\|X^n - 0\| = \frac{1}{2^n}.$$

On observe que ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la norme $\|\cdot\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$N(X^n - 1) = \frac{1}{n}.$$

Ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, si bien que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme 1 pour la norme N .

c. On remarque que la somme des coefficients s'annule encore pour $X^n - X$, mais l'autre somme ne tend pas vers 0 à cause du coefficient a_1 . Il suffit de modifier la deuxième somme pour qu'elle ne tienne plus compte de a_1 . Cependant, pour qu'elle vérifie encore la propriété de séparation, il faut insérer a_0 . Posons donc

$$M(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + |a_0| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

On peut vérifier que M est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout entier $n \geq 2$, on trouve $M(X^n - X) = 1/n$, ce qui donne la convergence souhaitée.

Exercice 2. ()** Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

- Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver la majoration $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, prouver la majoration $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty$.
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un vecteur colonne X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour lequel la majoration précédente est une égalité.

Solution de l'exercice 2.

- Corrigé en classe.

b. Soit (A, B) un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients de la matrice $A \times B$ sont donnés par

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Considérons un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\|AB\| = \sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}|.$$

On a alors

$$\|AB\| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|.$$

Appliquons l'inégalité triangulaire

$$\|AB\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}|.$$

On peut alors permuter les deux symboles de sommation puis mettre en facteur ce qui ne dépend pas du deuxième indice.

$$\|AB\| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right).$$

Chaque somme de la forme $\sum_{j=1}^n |b_{k,j}|$ est majorée par $\|B\|$, ce qui donne

$$\|AB\| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \times \|B\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On considère un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|AX\|_\infty = |(AX)_i|$. On a alors

$$\|AX\|_\infty = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \times |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \times \|X\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty.$$

d. Pour réaliser l'égalité dans le calcul précédent, il suffit de choisir $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et de définir un vecteur X en posant

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i,j} \geq 0 \\ -1 & \text{si } a_{i,j} < 0. \end{cases}$$

Avec ce choix, on obtient $\|A\| = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = (AX)_i$ et $\|X\|_\infty = 1$ donc

$$(AX)_i = \|A\| \times \|X\|_\infty$$

donc $\|A\| \times \|X\|_\infty \leq \|AX\|_\infty$, ce qui donne l'égalité en utilisant l'inégalité de la question précédente.

Exercice 3. Inégalités de Hölder et de Minkowski (**)

On fixe p dans $]1, +\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$.

On fixe un entier $n \geq 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

et on définit $\|x\|_q$ de manière analogue.

Question 1. Montrer que la fonction $\|\cdot\|_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

Question 2. Vérifier que q est dans $]1, +\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Question 3. Pour tout couple (α, β) de $([0, +\infty[)^2$, prouver l'inégalité $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

Question 4. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y .

Question 5. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}.$$

b. Majorer de même la somme $\sum_{k=1}^n |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

c. En déduire l'inégalité de Minkowski $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

d. Qu'a-t-on démontré ?

Solution de l'exercice 3.

Question 1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\|x\|_p$ est nul. On obtient alors

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 0.$$

C'est une somme nulle dont tous les termes sont positifs donc tous les termes sont nuls. Les coefficients de x sont donc tous nuls. Le vecteur x est donc nul.

La fonction $\|\cdot\|_p$ vérifie la propriété de séparation.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda \cdot x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda|^p \times |x_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \times \|x\|_p.$$

La fonction $\|\cdot\|_p$ est positivement homogène.

Question 2. On connaît les inégalités $p > p-1 > 0$. On en déduit que le quotient $\frac{p}{p-1}$ est strictement supérieur à 1. Le nombre q est donc dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On trouve de plus

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1.$$

Question 3. Soit (α, β) dans $\mathbb{R}^2$. Notons que si α ou β est nul, alors l'inégalité à démontrer s'écrit

$$0 \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q},$$

si bien qu'elle est vraie.

Il reste donc à prouver l'inégalité dans le cas où α et β sont tous deux non nuls. Pour cela, il suffit de prouver l'inégalité

$$\forall (s, t) \in]0, +\infty[^2, \quad st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}.$$

Fixons $s > 0$ et définissons la fonction $\varphi_s : t \mapsto \frac{t^q}{q} - st$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall t > 0, \quad \varphi'_s(t) = t^{q-1} - s.$$

Notons $t_s = s^{1/(q-1)}$. La fonction φ'_s est négative sur $]0, t_s]$ et positive sur $[t_s, +\infty[$.

La fonction φ_s est donc décroissante sur $]0, t_s]$ et croissante sur $[t_s, +\infty[$. Elle admet donc un minimum en t_s et ce minimum vaut

$$\varphi_s(t_s) = \frac{s^{\frac{q}{q-1}}}{q} - s \times s^{1/(q-1)} = s^{\frac{q}{q-1}} \left(\frac{1}{q} - 1 \right) = -\frac{s^p}{p}.$$

On obtient donc l'inégalité $\varphi_s(t) \geq -s^p/p$ pour tout $t > 0$ et ça se réécrit

$$\forall t > 0, \quad \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} \geq st.$$

L'inégalité demandée est prouvée dans tous les cas.

Question 4. Si x ou y est nul, alors l'inégalité à prouver est $0 \leq 0$, si bien qu'elle est vraie.

Supposons maintenant que x et y sont tous deux non nuls.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Appliquons la formule de la question 3 en prenant $\alpha = x_k/||x||_p$ et $\beta = y_k/||y||_q$. On obtient

$$\frac{|x_k y_k|}{||x||_p ||y||_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{||y||_q^q}.$$

Sommons cette inégalité pour k variant de 1 à n .

$$\frac{1}{||x||_p ||y||_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{p} \times \frac{1}{||x||_p^p} \sum_{k=1}^n |x_k|^p + \frac{1}{q} \times \frac{1}{||y||_q^q} \sum_{k=1}^n |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant par $||x||_p ||y||_q$, qui est strictement positif, on obtient l'inégalité attendue

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq ||x||_p ||y||_q.$$

L'inégalité de Hölder est démontrée dans tous les cas.

Question 5. a. On applique l'inégalité de Hölder aux vecteurs x et z , ce dernier ayant pour coordonnées

$$z_k = |x_k + y_k|^{p-1}.$$

L'erreur habituelle est d'oublier la valeur absolue dans l'expression de z_k . Cet oubli fait apparaître des expressions dénuées de sens.

On trouve

$$||z||_q = \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}$$

donc, en reportant dans l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}.$$

Question 5. b. En échangeant les rôles des vecteurs x et y , on obtient

$$\sum_{k=1}^n |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|y\|_p \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}.$$

Question 5. c. Déjà, si $x + y$ est le vecteur nul, l'inégalité à démontrer est vraie car elle s'écrit $0 \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
On suppose donc maintenant que $x + y$ n'est pas le vecteur nul.

Ajoutons les inégalités des questions précédentes.

$$\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}.$$

Minorons $|x_k| + |y_k|$ par $|x_k + y_k|$ au moyen de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. Remarquons aussi que le majorant fait apparaître une puissance de $\|x + y\|_p$.

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \times \|x + y\|_p^{p/q}.$$

L'exposant p/q vaut $p - 1$. On en tire la majoration

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \times \|x + y\|_p^{p-1}.$$

Divisons par $\|x + y\|_p^{p-1}$, qui est strictement positif. Il reste alors

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

L'inégalité de Minkowski est démontrée dans tous les cas.

Question 5. d. On a prouvé l'inégalité triangulaire pour la fonction $\|\cdot\|_p$. On peut finalement affirmer que cette fonction est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Question 6. Notons i un indice entre 1 et n vérifiant l'égalité $|x_i| = \|x\|_\infty$. Prenons p dans $]1, +\infty[$. On obtient l'encadrement

$$|x_i|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_i|^p, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|x\|_\infty^p \leq \|x\|_p^p \leq n \|x\|_\infty^p.$$

On en tire l'encadrement $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

On sait que $n^{1/p}$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\|x\|_p$ tend vers $\|x\|_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

Exercice 4. (*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x_0 \in E$. Montrer l'égalité

$$\bigcap_{n \geq 1} B\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right) = B_f(x_0, 1).$$

Solution de l'exercice 4. Notons I l'intersection proposée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la boule $B_f(x_0, 1)$ est incluse dans la boule $B(x_0, 1 + 1/n)$ donc elle est incluse dans l'intersection notée I .

Réciproquement, soit x un élément de I . On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x_0 - x\| < 1 + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient (conservation des inégalités *larges* par passage à la limite)

$$\|x_0 - x\| \leq 1,$$

ce qui prouve que x est dans $B_f(x_0, 1)$. On a prouvé l'inclusion de I dans $B_f(x_0, 1)$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité annoncé.

Exercice 5. (*) Soit $A \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \geq 0}$ converge. Montrer que sa limite est la matrice nulle.

Solution de l'exercice 5. Notons L la limite de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est également la limite des suites extraites $(A^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(A^{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

Rappelons que les ensembles $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que ce dernier est de dimension finie, si bien que ces deux sous-espaces vectoriels sont fermés.

La suite $(A^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ a tous ses termes dans $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, qui est fermée, donc sa limite L est dans $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$.

La suite $(A^{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ a tous ses termes dans $\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$, qui est fermée, donc sa limite L est dans $\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$.

La limite L est à la fois une matrice symétrique et antisymétrique donc elle est nulle.

Exercice 6. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \geq 0}$ converge. Montrer que sa limite est une matrice de projection.

Solution de l'exercice 6. Notons L la limite de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est aussi la limite de la suite extraite $(A^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Par continuité du produit matriciel, cette suite extraite converge également vers L^2 . Par unicité de la limite, il vient $L^2 = L$, ce qui prouve que L est une matrice de projection.

Exercice 7. ()** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E . On suppose que f préserve le produit scalaire, ce qui signifie que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

On pose $g = f - \text{Id}_E$.

a. Prouver l'égalité $\text{Im}(g) = (\text{Ker}(g))^\perp$.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Pour tout vecteur x de E , montrer que la suite $(p_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

Solution de l'exercice 7.

a. Soit $x \in \text{Im}(g)$. Soit $y \in \text{Ker}(g)$. Il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$. L'appartenance de y à $\text{Ker}(g)$ donne l'égalité $f(y) = y$. On a alors

$$(x|y) = (g(z)|y) = (f(z) - z|y) = (f(z)|y) - (z|y) = (f(z)|f(y)) - (z|y) = 0.$$

On a alors prouvé que les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ de E sont orthogonaux entre eux. Ils sont en particulier en somme directe. On connaît d'autre part la formule du rang

$$\dim(\text{Im}(g)) + \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(E).$$

Tout ceci permet de conclure que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires et orthogonaux, ce qui donne l'égalité $\text{Im}(g) = (\text{Ker}(g))^\perp$.

b. Soit $x \in E$. Il existe alors un unique couple (y, z) de $\text{Ker}(g) \times \text{Im}(g)$ tel que $x = y + z$. Le vecteur y est alors le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

On connaît l'égalité $f(y) = y$. On en déduit l'égalité $p_n(y) = y$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Le vecteur z est dans $\text{Im}(g)$ donc il existe w dans E tel que $z = g(w)$, ce qui donne $z = f(w) - w$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un télescopage donne

$$p_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^{k+1}(w) - f^k(w)) = \frac{1}{n} (f^n(w) - w).$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$\|p_n(z)\| \leq \frac{\|f^n(w)\| + \|w\|}{n}.$$

Rappelons que f préserve le produit scalaire. On en déduit que f préserve la norme euclidienne, ce qui donne notamment $\|f^n(w)\| = \|w\|$ puis

$$\|p_n(z)\| \leq \frac{2\|w\|}{n}.$$

La relation $p_n(x) = p_n(y) + p_n(z)$ donne $p_n(z) = p_n(x) - y$ puis

$$\|p_n(x) - y\| \leq \frac{2\|w\|}{n}.$$

On en déduit que $\|p_n(x) - y\|$ tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. En d'autres termes, la suite $(p_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

Exercice 8. (*) Montrer que l'adhérence de $\text{GL}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 8. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $M_n = M - I_p/n$. Remarquons l'égalité

$$\det(M_n) = (-1)^n \chi_M(1/n).$$

Le polynôme χ_M n'a qu'un nombre fini de racines donc il existe n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \chi_M(1/n) \neq 0.$$

La suite $(M_n)_{n \geq n_0}$ est donc à valeurs dans $\text{GL}_p(\mathbb{R})$. Cette suite converge vers M donc la matrice M est dans l'adhérence de $\text{GL}_p(\mathbb{R})$.

On a prouvé que l'adhérence de $\text{GL}_p(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. En d'autres termes, le sous-ensemble $\text{GL}_p(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 9. ()** Parmi les identités suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B); \quad \text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B); \quad \text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B); \quad \text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

Solution de l'exercice 9. La première égalité est fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, prenons $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a alors

$$\text{Int}(A) = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Int}(B) = \emptyset \quad \text{donc} \quad \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = \emptyset \quad \text{mais} \quad \text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

La deuxième égalité est vraie. Rappelons que l'intérieur d'une partie de E est le plus grand ouvert inclus dans cette partie.

L'ensemble $\text{Int}(A \cap B)$ est un ouvert inclus dans $A \cap B$. C'est donc un ouvert contenu dans A et dans B . Il est donc inclus dans $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

Réciproquement, l'ensemble $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ est l'intersection d'un ouvert contenu dans A et d'un ouvert contenu dans B donc c'est un ouvert contenu dans $A \cap B$ donc il est inclus dans $\text{Int}(A \cap B)$.

Par double inclusion, on a prouvé la deuxième égalité.

La troisième égalité est vraie aussi. Rappelons que l'adhérence d'une partie de E est le plus petit fermé contenant cette partie.

L'ensemble $\text{Adh}(A \cup B)$ est un fermé qui contient $A \cup B$. C'est donc un fermé qui contient A et qui contient B . Il contient donc $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$.

Réciproquement, l'ensemble $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ est la réunion d'un fermé qui contient A et d'un fermé qui contient B . C'est donc un fermé qui contient $A \cup B$, si bien qu'il contient $\text{Adh}(A \cup B)$.

Par double inclusion, on a prouvé la troisième égalité.

Enfin, la dernière égalité est fausse. Reprenons les parties $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. On a cette fois

$$\text{Adh}(A) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Adh}(B) = \mathbb{R} \quad \text{donc} \quad \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B) = \mathbb{R} \quad \text{mais} \quad \text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(\emptyset) = \emptyset.$$

Exercice 10. ()** Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.

Montrer l'égalité $\text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(U))) = \text{Adh}(U)$.

Solution de l'exercice 10. L'adhérence de U contient l'ouvert U donc $\text{Int}(\text{Adh}(U))$ contient U . Ainsi, l'ensemble $\text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(U)))$ est un fermé qui contient U , si bien qu'il contient $\text{Adh}(U)$.

Réciproquement, l'ensemble $\text{Int}(\text{Adh}(U))$ est inclus dans le fermé $\text{Adh}(U)$ donc son adhérence est également incluse dans $\text{Adh}(U)$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(U))) = \text{Adh}(U)$.

Exercice 11. (*) Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.

Montrer que la frontière de U est d'intérieur vide.

Solution de l'exercice 11. La frontière de U est donnée par

$$\text{Fr}(U) = \text{Adh}(U) \setminus \text{Int}(U).$$

L'ensemble U est ouvert, ce qui donne $\text{Int}(U) = U$ puis $\text{Fr}(U) = \text{Adh}(U) \setminus U$. En particulier, la frontière de U est disjointe¹ de U .

Supposons que la frontière de U ne soit pas d'intérieur vide. Cela signifie qu'il existe au moins un point intérieur à la frontière de U . Considérons un tel point et notons-le a . Il existe alors $r > 0$ tel que la boule $B(a, r)$ soit incluse dans $\text{Fr}(U)$. Cette boule est en particulier disjointe de U .

Le point a est un point adhérent à U donc l'intersection $B(a, r) \cap U$ est non vide : c'est une contradiction.

Cette absurdité montre que la frontière de U est vide.

Exercice 12. ()** Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par U est égal à E .

Solution de l'exercice 12. L'ouvert U étant non vide, considérons un élément a de U . L'ensemble U étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans U . Fixons un tel r .

1. Dans le cas où U est une boule ouverte, sa frontière est la sphère qui borde cette boule. La sphère en question est effectivement disjointe de la boule ouverte.

L'ensemble $\text{Vect}(U)$ contient alors la sphère $B(a, r)$ et le vecteur a . Par combinaison linéaire, il contient aussi l'ensemble

$$\{x - a ; x \in B(a, r)\},$$

c'est-à-dire la boule ouverte $B(0_E, r)$. Il contient aussi l'ensemble

$$\{\lambda y ; (\lambda, y) \in \mathbb{R} \times B(0_E, r)\},$$

c'est-à-dire E .

En effet, pour tout vecteur x non nul de E , on peut écrire

$$x = \lambda y \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{\|x\|} \times \frac{r}{2} \in B(0_E, r) \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2\|x\|}{r} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13. ()** On définit de E dans E la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\max(1, \|x\|)}.$$

Montrer que la fonction f est 2-lipschitzienne.

Solution de l'exercice 13. Soient x et y deux éléments de E . Le but est d'obtenir l'inégalité

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Premier cas. On fait les hypothèses $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, ce qui donne $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Deuxième cas. On fait les hypothèses $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \geq 1$, ce qui donne $f(x) = x$ et $f(y) = y/\|y\|$. On écrit alors

$$f(x) - f(y) = x - y + \frac{\|y\| - 1}{\|y\|} \times y.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| + |(\|y\| - 1)| = \|x - y\| + (\|y\| - 1).$$

La deuxième inégalité triangulaire donne ensuite $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \geq \|y\| - 1$ puis

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Le cas où $\|x\| \geq 1$ et $\|y\| \leq 1$ se traite pareillement.

Troisième cas. On fait les hypothèses $\|x\| \geq 1$ et $\|y\| \geq 1$, ce qui donne $f(x) = x/\|x\|$ et $f(y) = y/\|y\|$. On écrit alors

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} = \frac{\|y\|x - \|x\|y}{\|x\| \times \|y\|} = \frac{\|y\|(x - y) + (\|y\| - \|x\|)y}{\|x\| \times \|y\|}.$$

On applique alors l'inégalité triangulaire.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\|x - y\|}{\|x\|} + \left| \frac{\|y\| - \|x\|}{\|x\|} \right|.$$

Les inégalités $\|x\| \geq 1$ et $\|y - x\| \geq |\|y\| - \|x\||$ donnent finalement

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2 \times \|x - y\|.$$

Cette inégalité a été obtenue dans tous les cas donc la fonction f est 2-lipschitzienne.

Exercice 14. ()** Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E et on suppose qu'elles convergent. Leurs limites respectives sont notées x et y .

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (x_n, y_n) est liée. Montrer que la famille (x, y) est liée.

Pour cela, on raisonnera par l'absurde et on complétera la famille (x, y) en une base de E , afin d'utiliser le déterminant relatif à cette base.

Solution de l'exercice 14. On suppose que la famille (x, y) est libre et on la complète en une base $\mathcal{B} = (x, y, z_3, \dots, z_p)$ de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les coefficients de x_n et de y_n dans cette base

$$x_n = x_n(1)x + x_n(2)y + \sum_{k=3}^p x_n(k)z_k \quad \text{et} \quad y_n = y_n(1)x + y_n(2)y + \sum_{k=3}^p y_n(k)z_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille (x_n, y_n) est liée donc les couples $(x_n(1), x_n(2))$ et $(y_n(1), y_n(2))$ sont proportionnels, ce qui donne

$$x_n(1)y_n(2) - x_n(2)y_n(1) = 0.$$

L'espace vectoriel E est de dimension finie donc la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le vecteur x donne la convergence coordonnée par coordonnée. De même pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et le vecteur y . On obtient en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(2) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(2) = 1.$$

Ainsi, le produit en croix $x_n(1)y_n(2) - x_n(2)y_n(1)$ tend vers 1, ce qui est faux puisqu'il tend vers 0.

Cette contradiction prouve que la famille (x, y) est liée.

Traduction. On a prouvé que l'ensemble des couples liés de vecteurs de E est une partie fermée de l'espace vectoriel $E \times E$.