

Exercice 1. (*) On fixe α, β, γ dans $]0, +\infty[$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto x^\alpha e^{-n^\beta x^\gamma}$$

sur $[0, +\infty[$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Cette convergence est-elle uniforme ?

b. Soit $a > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Exercice 2. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$? sur $[0, +\infty[$? sur les segments de $[0, +\infty[$?

Exercice 3. (*) On fixe $\alpha > 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{(nx)^\alpha}{1 + nx^2}$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$.

b. Étudier la convergence uniforme.

Exercice 4. ()** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

b. Justifier que cette convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Pour cela, on prouvera la majoration $e^x - e^y \leq e^x(x - y)$ sous l'hypothèse $x \geq y$ et on étudiera les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto t - \ln(1 + t)$.

Solution de l'exercice 4.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n > -x$, on peut écrire

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, l'exposant admet le développement limité suivant

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = n \times \left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = x + o(1)$$

si bien que cet exposant tend vers x . Par continuité de l'exponentielle, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\exp(x)$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

b. Commençons par suivre les suggestions de l'énoncé. Soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $x \geq y$. On peut alors écrire

$$e^x - e^y = \int_y^x e^t dt \leq \int_y^x e^x dt = e^x(x - y).$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t - \ln(1 + t)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$, avec

$$\forall t > -1, \quad \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

La fonction φ est donc décroissante sur $] -1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Attaquons vraiment la question. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Observons pour commencer que si on prend un entier $n > -a$, alors, pour tout x dans le segment $[a, b]$, on a

$$1 + \frac{x}{n} \geq 1 + \frac{a}{n} > 0,$$

ce qui permet d'exploiter la forme exponentielle de la fonction f_n sur le segment $[a, b]$.

Prenons donc un entier $n > -a$. Soit x dans $[a, b]$.

$$e^x - f_n(x) = \exp(x) - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Les variations de la fonction φ donnent en particulier $\varphi(x/n) \geq 0$ donc

$$\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq 0 \quad \text{donc} \quad e^x \geq f_n(x).$$

En utilisant la majoration suggérée par l'énoncé, il vient alors

$$0 \leq e^x - f_n(x) \leq e^x \left(x - n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = e^x \times n \times \varphi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Rappelons que l'objectif est de majorer ceci par une quantité indépendante de x . On peut déjà majorer e^x par e^b . Les variations de la fonction φ donnent

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) \leq \max\left(\varphi\left(\frac{a}{n}\right), \varphi\left(\frac{b}{n}\right)\right) \leq \varphi\left(\frac{a}{n}\right) + \varphi\left(\frac{b}{n}\right)$$

puis finalement

$$0 \leq e^x - f_n(x) \leq e^b \times n \times \left(\varphi\left(\frac{a}{n}\right) + \varphi\left(\frac{b}{n}\right)\right).$$

Cette domination étant indépendante de x dans $[a, b]$, on obtient la majoration

$$\|\exp - f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq e^b \times n \times \left(\varphi\left(\frac{a}{n}\right) + \varphi\left(\frac{b}{n}\right)\right).$$

Le calcul de la première question montre que $n\varphi(a/n)$ et $n\varphi(b/n)$ tendent tous deux vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\|\exp - f_n\|_{\infty, [a, b]}$ tend vers 0 également.

On a alors prouvé que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur tout segment de $\mathbb{R}$.

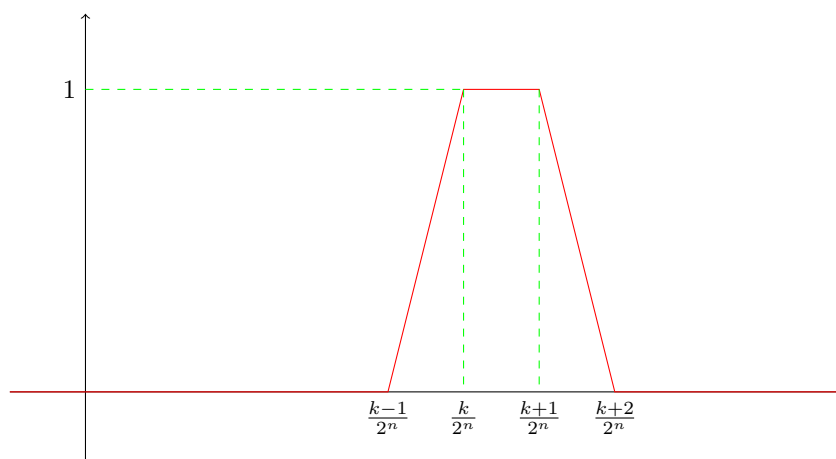
Exercice 5. ()** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle dont les termes sont dans $[0, 1]$. On suppose que cette suite converge et sa limite est notée ℓ .

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[0, 1]$. On suppose que cette suite de fonctions converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction g .

Montrer que la suite $(f_n(a_n))_{n \geq 0}$ converge vers le nombre $g(\ell)$.

Exercice 6. (*)** Construire une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles positives, telle que la suite $(\int_0^1 f_n)_{n \geq 0}$ tende vers 0 mais telle que la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ ne tende vers 0 pour aucune valeur de x .

Solution de l'exercice 6. Pour tout couple (k, n) d'entiers tels que $0 \leq k < 2^n$, on introduit la fonction $g_{n,k}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est ci-dessous, et on note $f_{n,k}$ sa restriction au segment $[0, 1]$.



L'intégrale de cette fonction sur $[0, 1]$ vaut 2^{-n+1} .

Construisons une suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ en concaténant les familles $(f_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$ pour n variant de 0 à l'infini.

L'intégrale de g_p sur $[0, 1]$ vaut $2^{-n(p)+1}$ pour un certain entier $n(p)$ et on peut montrer que $n(p)$ tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$, si bien que cette intégrale tend vers 0.

Si on prend un élément x quelconque de $[0, 1]$, on peut montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un entier $k(n, x)$ tel que $0 \leq k(n, x) < 2^n$ et $f_{n,k(n,x)}(x) = 1$, si bien que la suite $(g_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ a une suite extraite de limite 1, ce qui l'empêche de converger vers 0.

J'ai laissé quelques détails techniques à rédiger mais cette présentation serait suffisante lors d'un oral.

Exercice 7. ()** Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui s'annule en 1.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n f(x)$ sur $[0, 1]$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Solution de l'exercice 7. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en 1 donne l'existence de x_0 dans $[0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [x_0, 1], \quad |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit directement la majoration

$$\forall x \in [x_0, 1], \quad |f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée, ce qui permet d'écrire

$$\forall x \in [0, x_0], \quad |f_n(x)| \leq x^n \times \|f\|_{\infty, [0, 1]} \leq (x_0)^n \|f\|_{\infty, [0, 1]}.$$

On sait que $(x_0)^n \|f\|_{\infty, [0, 1]}$ tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$ donc il existe un rang n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad (x_0)^n \times \|f\|_{\infty, [0, 1]} \leq \varepsilon.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, on obtient alors la majoration uniforme

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \varepsilon.$$

On a plus précisément démontré ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|f_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $\|f_n\|_{\infty, [0, 1]}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En d'autres termes, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.