PC* — mathématiques **samedi 9 novembre 2019**
Corrigé du devoir en temps libre n° 3

Corrigé du devoir en temps libre n° 3

Exercice 1. I.1. La fonction $f_{n,\alpha} : t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Quand t tend vers $+\infty$, on remarque que $f_{n,\alpha}(t)$ est équivalent à $1/t^{n\alpha}$. Or la fonction $t \mapsto 1/t^{n\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ car $n\alpha > 1$. On en déduit que la fonction $f_{n,\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Son intégrabilité sur $[0, 1]$ est déjà connue donc elle est intégrable sur $[0, 1]$.

Finalement, le nombre $u_n(\alpha)$ est bien défini.

I.2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Fixons $x > 0$ et $y > x$ et effectuons une intégration par parties dans l'intégrale

$$\int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}.$$

On dérive la fonction $f_{n,\alpha}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[x, y]$, de dérivée $t \mapsto -n\alpha t^{\alpha-1}/(1+t^\alpha)^{n+1}$. On primitive la fonction $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} &= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} - \frac{x}{(1+x^\alpha)^n} + n\alpha \int_x^y \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} - \frac{x}{(1+x^\alpha)^n} + n\alpha \int_x^y \frac{1+t^\alpha-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{y}{(1+y^\alpha)^n} - \frac{x}{(1+x^\alpha)^n} + n\alpha \int_x^y \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n}}\,\mathrm{d}t - n\alpha \int_x^y \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On remarque maintenant que $\dfrac{x}{(1+x^\alpha)^n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et que $\dfrac{y}{(1+y^\alpha)^n}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ (car $\alpha n > 1$). Ainsi, en faisant tendre x vers 0 puis y vers $+\infty$ (ou l'inverse, mais pas les deux en même temps car ça n'aurait aucun sens), on obtient

$$u_n(\alpha) = n\alpha\left(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)\right).$$

Remarque. Il n'est en fait pas nécessaire de s'écarter de la borne 0 car la condition $\alpha > 1$ fait que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ mais avec ces fonctions-là, ce genre de précaution ne coûte pas cher et évite des ennuis.

I.3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On trouve

$$w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = \ln\left(\frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n\alpha-1}{n\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

On connaît le développement limité $\ln(1+s) = s + \underset{s\to 0}{\mathcal{O}}(s^2)$. On en déduit le développement limité

$$w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que la série de terme général $1/n^2$ est convergente. On en déduit que la série $\sum(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$ est absolument convergente, donc convergente. C'est la série des différences de la suite $(w_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ donc cette suite est convergente. Notons $k(\alpha)$ sa limite. Remarquons maintenant la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n(\alpha) = \ln\left(n^{1/\alpha} u_n(\alpha)\right).$$

Par continuité de l'exponentielle, on voit que $n^{1/\alpha}u_n(\alpha)$ tend vers $\exp(k(\alpha))$ quand l'entier n tend vers $+\infty$. Posons

$$\mathrm{K}(\alpha) = \exp(k(\alpha)).$$

Ce nombre est strictement positif et on a prouvé que $u_n(\alpha)$ est équivalent à $\mathrm{K}(\alpha)/n^{1/\alpha}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

I.4. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. On trouve, à l'aide de la relation de récurrence de la question 2,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_n(\alpha)}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \alpha\left(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)\right) = \alpha\left(u_1(\alpha) - u_{\mathrm{N}+1}(\alpha)\right).$$

L'équivalent de la question précédente prouve que $u_{\mathrm{N}+1}(\alpha)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)/n$ est convergente et que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(\alpha)}{n} = \alpha u_1(\alpha).$$

II.1. Soit x dans $]0,+\infty[$. La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Elle est également positive.

Quand t tend vers 0, on voit que $g_x(t)$ est équivalent à t^{x-1}, c'est-à-dire à $1/t^{1-x}$. L'exposant $1-x$ est strictement inférieur à 1 donc l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{d}t/t^{1-x}$ est convergente. Le critère des équivalents permet d'en déduire que la fonction g_x est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.

Quand t tend vers $+\infty$, on voit que $t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0, si bien que $g_x(t)$ est négligeable devant $1/t^2$. On sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$ est convergente. Le critère de négligeabilité permet d'en déduire que la fonction g_x est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

II.2. Soit x dans $]0,+\infty[$. Prenons $a>0$ et $b>a$ (cette fois, il est absolument nécessaire de s'écarter de la borne 0) et effectuons une intégration par parties dans l'intégrale

$$\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On primitive la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ en $t \mapsto t^x/x$ et on dérive la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$.

$$\int_a^b t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{b^x\mathrm{e}^{-b}}{x} - \frac{a^x\mathrm{e}^{-a}}{x} + \frac{1}{x}\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}.$$

Quand a tend vers 0, le produit $a^x\mathrm{e}^{-a}$ tend vers 0 car l'exposant x est strictement positif.

Quand b tend vers $+\infty$, le produit $b^x\mathrm{e}^{-b}$ tend vers 0 par croissances comparées. En effectuant successivement ces deux passages à la limite, on obtient

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

II.3. Il suffit ici de prouver la majoration $\mathrm{e}^{-u} \leqslant \frac{1}{1+u}$, ou encore $\mathrm{e}^u \geqslant 1+u$. Définissons donc la fonction

$$\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u - (1+u).$$

Cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, avec

$$\forall u \geqslant 0, \qquad \varphi'(u) = \mathrm{e}^u - 1 \geqslant 0.$$

La fonction φ est donc croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, elle s'annule en 0 donc elle est positive sur $[0,+\infty[$. On obtient

$$\forall u \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^u \geqslant 1+u > 0$$

puis, par passage à l'inverse

$$\forall u \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^{-u} \leqslant \frac{1}{1+u}.$$

On effectue maintenant la substitution $u \leftarrow t^\alpha$, qui donne

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^{-t^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha}$$

puis on élève à la puissance n (les nombres sont positifs donc le sens de l'inégalité est préservé)

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \mathrm{e}^{-nt^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

En particulier, on en déduit que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-nt^\alpha}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on obtient l'inégalité

$$u_n(\alpha) \geqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^\alpha}\ \mathrm{d}t.$$

Effectuons dans cette nouvelle intégrale le changement de variable $u = nt^\alpha$. On peut le faire car la fonction

$$t \mapsto nt^\alpha$$

est une bijection de $]0,+\infty[$ strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient les relations formelles $t = n^{-1/\alpha}u^{1/\alpha}$ puis $\mathrm{d}t = n^{-1/\alpha}(1/\alpha)u^{\frac{1}{\alpha}-1}\ \mathrm{d}u$. Le changement de variable donne

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^\alpha}\ \mathrm{d}t = \frac{n^{-1/\alpha}}{\alpha}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \frac{n^{-1/\alpha}}{\alpha}\Gamma(1/\alpha).$$

La minoration donne ensuite

$$n^{1/\alpha}u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{K}(\alpha) \geqslant \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

II.4. Soit t dans $[b,+\infty[$. On peut écrire

$$(1+t^\alpha)^n = (1+t^\alpha)^{n-1} \times (1+t^\alpha) \geqslant (1+b^\alpha)^{n-1} \times (1+t^\alpha) > 0$$

puis

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{(1+b^\alpha)^{n-1}} \times \frac{1}{1+t^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{(1+b^\alpha)^{n-1}}\int_b^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}.$$

L'intégrande étant positif, on trouve ensuite

$$\int_b^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = u_1(\alpha)$$

puis

$$\int_b^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \frac{1}{(1+b^\alpha)^{n-1}}u_1(\alpha).$$

II.5. On sait que le quotient $\ln(1+t^\alpha)/t^\alpha$ tend vers 1 quand t tend vers 0. D'après la définition de la limite, il existe a dans $]0,1[$ vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in\ ]0,a], \qquad 1-\rho \leqslant \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\alpha}.$$

On multiplie par t^α, qui est strictement positif

$$\forall t \in\ ]0,a], \qquad (1-\rho)t^\alpha \leqslant \ln(1+t^\alpha).$$

Cette inégalité est également valable pour $t=0$ (elle s'écrit $0 \leqslant 0$). On applique ensuite la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$, qui est décroissante, pour obtenir

$$\forall t \in [0,a], \qquad \exp\left((1-\rho)t^\alpha\right) \geqslant \frac{1}{1+t^\alpha}.$$

II.6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $u = n(1-\rho)t^\alpha$ dans l'intégrale

$$n^{1/\alpha}\int_0^a \exp(-n(1-\rho)t^\alpha)\ \mathrm{d}t.$$

C'est possible car la fonction $t \mapsto n(1-\rho)t^\alpha$ est une bijection de $]0,a]$ sur $]0, n(1-\rho)a^\alpha]$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Le calcul formel donne $t = n^{-1/\alpha}(1-\rho)^{-1/\alpha}u^{1/\alpha}$ puis $\mathrm{d}t = n^{-1/\alpha}(1-\rho)^{-1/\alpha}(1/\alpha)u^{\frac{1}{\alpha}-1}\ \mathrm{d}u$. On obtient

$$n^{1/\alpha}\int_0^a \exp(-n(1-\rho)t^\alpha)\ \mathrm{d}t = (1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^{n(1-\rho)a^\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u$$

Quand n tend vers $+\infty$, ceci tend vers

$$(1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = (1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Commençons par appliquer la relation de Chasles

$$n^{1/\alpha}u_n(\alpha) = n^\alpha\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} + n^\alpha\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$$

puis utilisons les majorations des deux questions précédentes

$$n^{1/\alpha}u_n(\alpha) \leqslant n^{1/\alpha}\int_0^a \exp(-n(1-\rho)t^\alpha)\ \mathrm{d}t + \frac{n^{1/\alpha}u_1(\alpha)}{(1+a^\alpha)^{n-1}}.$$

Quand on fait tendre n vers $+\infty$, le quotient $\frac{n^{1/\alpha}u_1(\alpha)}{(1+a^\alpha)^{n-1}}$ tend vers 0 par croissances comparées. On obtient donc

$$\mathrm{K}(\alpha) \leqslant (1-\rho)^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

II.7. L'inégalité précédente est valable pour tout ρ dans $]0,1[$. On peut donc faire tendre ρ vers 0 et obtenir

$$\mathrm{K}(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

En combinant cette inégalité avec celle de la question II.3, on obtient finalement l'égalité

$$\mathrm{K}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Exercice 2. a. Les fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ et $g : t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sont continues et positives sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $t \geqslant 1$, observons les inégalités

$$0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ donne l'intégrabilité de g, puis de f, sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

On en déduit l'existence des intégrales de f et g sur $[0,+\infty[$.

---

b. La fonction $t \mapsto 1/t$, définie de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$, est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = 1/t$, qui donne $\mathrm{d}u = -\ \mathrm{d}t/t^2$ puis

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{+\infty}^0 \frac{1/u^2}{1+1/u^4}(-\ \mathrm{d}u) = \int_0^{+\infty}\frac{u^2}{u^4+1}\ \mathrm{d}u = \mathrm{J}.$$

---

c. La fonction $\varphi : t \mapsto t - 1/t$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, strictement croissante, avec pour limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction φ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $x = t - 1/t$, qui donne $\mathrm{d}x = (1 + 1/t^2)\ \mathrm{d}t$.

Commençons par écrire

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t$$

de manière à faire apparaître $\mathrm{d}x$. L'intégrande se réécrit maintenant

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{1}{\frac{1}{t^2} + t^2} = \frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2 + 2} = \frac{1}{x^2+2},$$

ce qui donne donc

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

puis finalement $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin^{2n+1}(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on observe la domination $|f_n(t)| \leqslant 1/t^2$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$ converge donc la fonction f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Quand t tend vers 0, on observe que $f_n(t)$ est équivalent à t^{2n-1} donc f_n possède une limite nulle en 0. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0, 1]$.

Finalement, la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui répond à la question.

---

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On linéarise

$$\sin^{2n+1}(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1-k)}(-1)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tk} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1-2k)}.$$

On coupe la somme en deux

$$\sin^{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\mathrm{i}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1-2k)} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1-2k)}\right).$$

Pour tout indice k concerné, on connaît l'identité $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$. Pour exploiter cette identité, on effectue le changement d'indice $\ell = 2n+1-k$ dans la dernière somme. Quand l'indice k varie de $n+1$ à $2n+1$, l'indice ℓ varie de n à 0 en décroissant. De plus, on remarque l'égalité

$$2n+1-2k = 2n+1-2(2n+1-\ell) = -(2n+1)+2\ell.$$

Il vient

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1-2k)} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-\ell}(-1)^{2n+1-\ell} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(-(2n+1)+2\ell)} = -\sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{\ell}(-1)^\ell \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(2n+1-2\ell)}.$$

En reportant dans la formule linéarisée, il vient

$$\sin^{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}(-1)^k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1-2k)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(2n+1-2k)}}{2\mathrm{i}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}(-1)^k \sin((2n+1-2k)t).$$

---

3. Quand t tend vers 0, on remarque que $\sin^{2n+1}(t)$ est équivalent à t^{2n+1} donc $\sin^{2n+1}(t) = \mathrm{o}(t)$ car $2n+1 > 1$.

L'expression de la question 14 donne aussi

$$\sin^{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k)t + \mathrm{o}(t).$$

Par unicité du développement limité, l'expression du coefficient devant t donne l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) = 0.$$

---

4. Soit $x > 0$. La linéarité de l'intégrale donne

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \int_x^{+\infty} \frac{\sin((2n+1-2k)t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Cette écriture est licite car toutes les intégrales écrites sont absolument convergentes (même argument qu'à la question 13).

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. L'entier $2n+1-2k$ est strictement positif. On peut donc définir la fonction $t \mapsto (2n+1-2k)t$ de $[x,+\infty[$ vers $[(2n+1-2k)x,+\infty[$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante donc on peut effectuer le changement de variable $u = (2n+1-2k)t$.

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin((2n+1-2k)t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{(2n+1-2k)x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2/(2n+1-2k)^2} \frac{\mathrm{d}u}{2n+1-2k} = (2n+1-2k) \int_{(2n+1-2k)x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On peut maintenant séparer cette intégrale par la relation de Chasles

$$\int_{(2n+1-2k)x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u - \int_x^{(2n+1-2k)x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

En reportant dans la formule linéarisée, on obtient

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t =& \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &- \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) \int_x^{(2n+1-2k)x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Le membre de droite de la première ligne est nul d'après la formule de la question 15. Il reste alors la formule attendue

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) \int_x^{(2n+1-2k)x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

---

5. Le développement limité $\sin(u) = u + \mathrm{o}(u^2)$ montre que $\frac{\sin(u)-u}{u^2}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$, si bien que la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{\sin(u)-u}{u^2}$ est intégrable sur $]0,1]$.

En décomposant sous la forme

$$\int_x^{\alpha x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\alpha x}^{1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

on voit que cette différence tend vers 0 quand x tend vers 0. Or cette différence s'écrit

$$\int_x^{\alpha x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{\alpha x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u - \int_x^{\alpha x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_x^{\alpha x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u - \ln(\alpha).$$

On en déduit que $\displaystyle\int_x^{\alpha x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ tend vers $\ln(\alpha)$ quand x tend vers 0.

---

6. En faisant tendre x vers 0 dans la formule de la question 16, on obtient finalement

$$\mathrm{I}_n = -\frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) \ln(2n+1-2k).$$

Exercice 4. Cet exercice est emprunté à une épreuve du concours E4A (ancienne version de E3A) PSI de l'année 1999.

Question 1. Partons de l'intégrale du membre de droite de l'égalité et intégrons par parties. On primitive f'' en f' et on dérive la fonction $x \mapsto (b-x)(x-a)$ en $x \mapsto -2x+a+b$. On obtient

$$\int_a^b (b-x)(x-a) f''(x)\ \mathrm{d}x = [(b-x)(x-a)f'(x)]_a^b - \int_a^b (a+b-2x) f'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Le terme tout intégré est nul. On effectue une nouvelle intégration par parties. On primitive f' en f et on dérive $x \mapsto a+b-2x$ en $x \mapsto -2$.

$$\int_a^b (a+b-2x) f'(x)\ \mathrm{d}x = [(a+b-2x)f(x)]_a^b + 2\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (a-b)f(b) - (b-a)f(a) + 2\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

De ces deux égalités, on tire la formule de l'énoncé

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a) f''(x)\ \mathrm{d}x.$$

Question 2. Prenons n dans $\mathbb{N}^*$. Appliquons la formule de la question précédente pour $(a,b,f) = (n, n+1, g)$.

$$\int_n^{n+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(g(n)+g(n+1)\right) - \frac{1}{2}\int_n^{n+1} (n+1-x)(x-n) g''(x)\ \mathrm{d}x.$$

On en tire l'égalité

$$w_n = -\frac{1}{2}\int_n^{n+1} (n+1-x)(x-n) g''(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dérivons la fonction g

$$\forall x \geqslant 1, \qquad g'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2x} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2x^{3/2}}.$$

Dérivons une deuxième fois

$$\forall x \geqslant 1, \qquad g''(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{4x^{3/2}} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{2x^2} - \frac{\cos(\sqrt{x})}{4x^2} + \frac{3\sin(\sqrt{x})}{4x^{5/2}}.$$

Soit $x \in [1, +\infty[$. L'inégalité triangulaire donne ensuite

$$|g''(x)| \leqslant \frac{|\sin(\sqrt{x})|}{4x^{3/2}} + \frac{|\cos(\sqrt{x})|}{2x^2} + \frac{|\cos(\sqrt{x})|}{4x^2} + \frac{3|\sin(\sqrt{x})|}{4x^{5/2}} \leqslant \frac{1}{4x^{3/2}} + \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{4x^{5/2}}.$$

Remarquons les inégalités $1/x^{5/2} \leqslant 1/x^2 \leqslant 1/x^{3/2}$. Il reste

$$|g''(x)| \leqslant \frac{7}{4x^{3/2}}.$$

En particulier, pour tout x dans $[n, n+1]$, on obtient $|g''(x)| \leqslant 7/4n^{3/2}$. Pour tout x dans $[n, n+1]$, on remarque aussi les inégalités

$$0 \leqslant (n+1-x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant (x-n) \leqslant 1.$$

On obtient donc

$$|w_n| = \frac{1}{2}\left|\int_n^{n+1} (n+1-x)(x-n) g''(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_n^{n+1} (n+1-x)(x-n)\,|g''(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{7}{4n^{3/2}}\ \mathrm{d}x = \frac{7}{8n^{3/2}}.$$

L'inégalité $3/2 > 1$ prouve que la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. On en déduit que la série $\sum |w_n|$ est convergente.

Question 3. Supposons que la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 1}$ possède une limite ℓ. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on connaît la relation

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1),$$

qui se réécrit

$$\sin(n) = \frac{\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1)}{\sin(1)}$$

car $\sin(1) \neq 0$. On en déduit que la suite $(\sin(n))_{n\geqslant 1}$ converge vers le nombre

$$m = \ell \times \frac{\cos(1) - 1}{\sin(1)}$$

puis que la suite $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n})_{n\geqslant 1}$ converge vers le nombre complexe $\ell + \mathrm{i}m$, noté z dans la suite. La relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}$$

donne, par passage à la limite, la relation $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} z$ puis $z = 0$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \neq 1$. On en déduit que la suite de terme général e^{in} converge vers 0 mais c'est impossible car tous ses termes sont de module 1.

Cette contradiction prouve que la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite du tout.

Question 4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La relation de Chasles donne

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \int_1^{n+1} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos(\sqrt{x})\right]_1^{n+1} = -2\cos(\sqrt{n+1}) + 2\cos(1).$$

Supposons que la série $\sum v_k$ soit convergente et notons sa somme S. On en déduit alors que la suite de terme général $\cos(\sqrt{n})$ converge vers $\cos(1) - \mathrm{S}/2$. Cependant, la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de cette suite donc elle converge aussi.

On a prouvé à la question précédente que cette suite diverge donc l'hypothèse de convergence de la série $\sum v_k$ était fausse : cette série diverge.

Question 5. Soit un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$. Sommons la relation obtenue à la question 2

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (u_n + u_{n+1}) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n.$$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, introduisons la somme partielle

$$\mathrm{U}_p = \sum_{n=1}^{p} u_n.$$

La formule ci-dessus se réécrit

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_\mathrm{N} + \mathrm{U}_\mathrm{N} - u_1 + u_{\mathrm{N}+1}) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n.$$

Isolons la somme partielle U_N :

$$\mathrm{U}_\mathrm{N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n + \frac{u_1}{2} - \frac{u_{\mathrm{N}+1}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n.$$

Dans cette expression, les trois derniers termes ont une limite finie quand N tend vers $+\infty$ (le premier est une constante, le deuxième tend vers 0, le troisième est la somme partielle d'une série convergente, comme vu à la question 2) mais le premier n'a pas de limite.

On en déduit que la suite de terme général U_N n'a pas de limite. Par conséquent, la série de terme général u_n est divergente.