

Devoir en temps libre n° 4
Exercice 1 : pseudo-inverse d'une matrice carrée

Étant donné deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on dit que B est un *pseudo-inverse* de A si et seulement si les égalités suivantes sont vérifiées :

$$AB = BA \quad ; \quad ABA = A \quad ; \quad BAB = B.$$

Première partie : existence d'un pseudo-inverse

Dans cette partie, on fixe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base $\mathcal{B}$.

I.1. Montrer que si A possède un pseudo-inverse, alors on a l'égalité $\text{Ker}(a^2) = \text{Ker}(a)$. Montrer par ailleurs que cette égalité entraîne l'égalité $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.

I.2. Dans cette question, on suppose réciproquement que la matrice A vérifie l'égalité $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$ et on va montrer que A possède un pseudo-inverse. On notera r le rang de la matrice A .

a. Montrer que le noyau et l'image de a sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer qu'il existe une matrice W dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice C dans $\text{GL}_r(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$A = W \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

c. En déduire que la matrice A possède au moins un pseudo-inverse.

On a alors prouvé qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A possède un pseudo-inverse est que A et A^2 aient le même rang.

Deuxième partie : unicité d'un pseudo-inverse

Dans cette partie, on suppose que la matrice A possède au moins un pseudo-inverse et on considère B , un pseudo-inverse de A quelconque. On note respectivement a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ représentés par A et B dans la base $\mathcal{B}$. On reprend les notations C et W employées à la question **I.2.b**.

II.1. a. Montrer que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par b .

b. Montrer qu'il existe une matrice D de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $B = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$.

II.2. a. Montrer que $a \circ b$ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

b. Préciser son noyau et son image en fonction de ceux de a .

c. Que vaut la matrice $W^{-1}ABW$?

II.3. Montrer que A admet un unique pseudo-inverse.

Exercice 2. ()** Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Prouver l'équivalence

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v) \iff F = \text{Im}(u) + \text{Ker}(v).$$

Exercice 3. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $]0, +\infty[$, on pose

$$g_n(x) = \frac{n! \times n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad \text{et} \quad f_n(x) = \ln(g_n(x)).$$

- a. Montrer que la série de fonctions $\sum (f_n - f_{n-1})$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- b. En déduire que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur cet intervalle. On note G sa limite simple.
- c. Pour tout $x > 0$, montrer la formule

$$\ln(G(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right),$$

où γ est la constante d'Euler.

- d. En déduire que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer la fonction G'/G . Que vaut $G'(1)$?
- e. Prouver que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4. ()** Pour tout α dans $[0, +\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_{n,\alpha} : x \mapsto x^\alpha e^{-x\sqrt{n}}$$

de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- a. Soit α dans $]0, +\infty[$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_{n,\alpha}$ converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Que dire de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_{n,0}$?

- b. Trouver quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_{n,\alpha}$ converge normalement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

- c. On pose

$$F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n,\alpha}(x)$$

quand c'est possible.

Quels sont les résultats de continuité qui découlent du résultat de la question précédente? Quels autres résultats de continuité peut-on obtenir par des arguments de convergence normale?

- d. À l'aide d'encadrements par des intégrales, obtenir un équivalent de $F_0(x)$ quand x tend vers 0. À la lueur de cet équivalent, compléter les conclusions de la question précédente.

Exercice 5. ()** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel normé $(E, || \cdot ||)$ de dimension finie.

Montrer que l'égalité $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ équivaut à l'existence de $C > 0$ tel que $\forall x \in E, ||f(x)|| \leq C \times ||f^2(x)||$.

Exercice 6. ()** Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A un ouvert de E . Soit B une partie quelconque de E .

- a. Prouver l'égalité $\text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$.
- b. Trouver un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert.