PC* — mathématiques **jeudi 28 novembre 2019**
Devoir surveillé n° 3 — piste bleue **durée : 4 heures**

Problème I — semi-normes commutantes

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Dire qu'une fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est *commutante* signifie qu'elle vérifie l'identité

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad f(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = f(\mathrm{B} \times \mathrm{A}).$$

On introduit la base canonique $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que pour tout couple (i, j) d'indices entre 1 et n, la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ a tous ses coefficients nuls, à l'exception du coefficient situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne, qui vaut 1.

La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathbb{O}_n$.

Partie 1 — calculs préliminaires

Question 1. Soient (i, j) et (k, ℓ) deux couples d'indices entre 1 et n. Montrer l'égalité

$$\mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \begin{cases} \mathrm{E}_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ \mathbb{O}_n & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Pour tout élément $t = (t_1, \ldots, t_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère la matrice

$$\mathrm{M}(t) = \sum_{r=1}^{n} t_r \mathrm{E}_{r,1}.$$

On considère également la matrice $\mathrm{X} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{E}_{1,j} + \sum\limits_{i=2}^{n} \mathrm{E}_{i,i}$.

Question 2. Calculer les matrices $\mathrm{XM}(t)$ et $\mathrm{M}(t)\mathrm{X}$.

Partie 2 — semi-normes commutantes

Question 3. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui soit une fonction commutante.

Définition. Une *semi-norme* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui vérifie tous les axiomes d'une norme autres que la séparation.

En d'autres termes, c'est une fonction à valeurs réelles positives qui vérifie l'axiome d'homogénéité positive et l'inégalité triangulaire

$$\begin{cases} \text{(SN1)} \quad \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \mathrm{M}) = |\lambda|\, f(\mathrm{M}); \\ \text{(SN2)} \quad \forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad f(\mathrm{M} + \mathrm{N}) \leqslant f(\mathrm{M}) + f(\mathrm{N}). \end{cases}$$

Question 4. Soit f une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité $f(\mathbb{O}_n) = 0$.

Question 5. Dans cette question, on considère une semi-norme f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que c'est une fonction commutante.

a. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(\mathrm{B}) = 0$. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}).$$

b. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, montrer l'égalité $f(\mathrm{E}_{i,j}) = 0$.

c. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Montrer l'égalité $f(\mathrm{B}) = 0$.

d. Soit $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'égalité

$$f\left(\sum_{r=1}^{n} t_r\, \mathrm{E}_{r,r}\right) = \left|\sum_{r=1}^{n} t_r\right| f(\mathrm{E}_{1,1}).$$

e. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'égalité $f(\mathrm{A}) = |\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \times f(\mathrm{E}_{1,1})$.

Problème II — théorème de Borel

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant [1].

Théorème. Pour toute suite complexe $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(0) = c_p.$$

On définit la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout b réel, on définit la fonction $\varphi_b : x \mapsto \dfrac{1}{1+b^2x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Partie 1 — calculs préliminaires

Question 6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer la relation

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p\, p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}}.$$

Question 7. Trouver deux constantes complexes a et b telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-\mathrm{i}} + \frac{b}{x+\mathrm{i}}.$$

Question 8. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de la fonction $\varphi_1^{(p)}$.

Question 9. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer la majoration

$$\left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}\right| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}.$$

Question 10. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, montrer la majoration

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Question 11. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, montrer la majoration

$$|a| \times \left|\varphi_a^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Partie 2 — étude d'une série de fonctions

On se donne une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la fonction u_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n\, x^n}{1+n!\, a_n^2\, x^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \sqrt{n!} \times a_n$.

Question 12. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geqslant p$, montrer que la dérivée p-ième de la fonction u_n est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n^{(p)}(x) = a_n \times \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \times \varphi_{r_n}^{(p-k)}(x).$$

Question 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que $u_n^{(p)}(0)$ est nul. Déterminer la valeur de $u_n^{(n)}(0)$.

1. Démontré par Émile Borel en 1895, mais également par Giuseppe Peano en 1884.

Question 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, montrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\, p!\, 2^n.$$

Question 15. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée U.

Question 16. Pour tout $s > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant p+1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur le segment $[-s, s]$.

Question 17. Montrer que la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Question 18. Montrer l'égalité $\mathrm{U}(0) = a_0$ ainsi que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{U}^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!\, a_p.$$

Partie 3 — démonstration du théorème de Borel

Question 19. Démontrer le théorème de Borel pour les suites réelles.

Question 20. Démontrer le théorème de Borel dans le cas général.

Problème III — étude d'une série de fonctions

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$f_n : x \mapsto n\ \mathrm{e}^{-n^2 x}.$$

Question 21. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Sa somme est notée F. On rappelle qu'elle est définie par la formule

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[, \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Question 22. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

Question 23. Prouver que la fonction F est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Dans la suite, pour tout $x > 0$, on définit une fonction g_x sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par la formule

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad g_x(t) = t\ \mathrm{e}^{-t^2 x}$$

et on note n_x la partie entière du nombre $1/\sqrt{2x}$.

Question 24. Soit $x > 0$. Étudier les variations de la fonction g_x.

Question 25. Soit $x > 0$. Soit un entier $\mathrm{N} \geqslant n_x + 1$. Prouver l'inégalité

$$\int_0^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n).$$

Question 26. Soit $x > 0$. Soit un entier $\mathrm{N} \geqslant n_x + 2$. Prouver l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n) \leqslant \int_1^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}} g_x(t)\ \mathrm{d}t + g_x(n_x) + g_x(n_x+1).$$

Question 27. Soit $x > 0$. Prouver l'encadrement

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-n_x^2\, x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}}{2x} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-n_x^2\, x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}}{2x} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Question 28. En déduire un équivalent de $\mathrm{F}(x)$ quand x tend vers 0.
