PC* — mathématiques **jeudi 28 novembre 2019**
Corrigé du devoir surveillé n° 3 — piste bleue

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 3 — piste bleue

Problème I

Question 1. Corrigé en classe.

Question 2. Développons le produit

$$\mathrm{XM}(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}t_r\mathrm{E}_{1,j}\mathrm{E}_{r,1}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{r=1}^{n}t_r\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{E}_{r,1}.$$

Le produit $\mathrm{E}_{1,j}\mathrm{E}_{r,1}$ est nul si $j\neq r$ et vaut $\mathrm{E}_{1,1}$ sinon. Le produit $\mathrm{E}_{i,i}\mathrm{E}_{r,1}$ est nul si $i\neq r$ et vaut $\mathrm{E}_{i,1}$ sinon. Il reste donc

$$\mathrm{XM}(t)=\left(\sum_{j=1}^{n}t_j\right)\mathrm{E}_{1,1}+\sum_{i=2}^{n}t_i\,\mathrm{E}_{i,1}.$$

Un calcul similaire donne

$$\mathrm{M}(t)\mathrm{X}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}t_r\mathrm{E}_{r,1}\mathrm{E}_{1,j}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=2}^{n}t_r\underbrace{\mathrm{E}_{r,1}\mathrm{E}_{i,i}}_{=\mathbb{O}_n}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}t_r\mathrm{E}_{r,j}.$$

Question 3. Soit $||\ ||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que c'est une fonction commutante. On obtient alors notamment

$$||\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{E}_{1,2}||=||\mathrm{E}_{1,2}\mathrm{E}_{1,1}||\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad||\mathrm{E}_{1,2}||=||\mathbb{O}_n||=0$$

mais cela contredit la propriété de séparation, le vecteur $\mathrm{E}_{1,2}$ n'étant pas nul.

Aucune norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne peut être une fonction commutante.

Question 4. L'axiome (SN1) donne

$$f(\mathbb{O}_n)=f(0\times\mathbb{O}_n)=|0|\times f(\mathbb{O}_n)=0.$$

Question 5.a. L'inégalité triangulaire donne

$$f(\mathrm{A}+\mathrm{B})\leqslant f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})=f(\mathrm{A})$$

et

$$f(\mathrm{A})\leqslant f(\mathrm{A}+\mathrm{B})+f(-\mathrm{B})=f(\mathrm{A}+\mathrm{B})+f(\mathrm{B})=f(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

donc $f(\mathrm{A}+\mathrm{B})=f(\mathrm{A})$.

Question 5.b. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]$ tel que $i\neq j$. Le fait que f soit commutante donne

$$f(\mathrm{E}_{i,j}\times\mathrm{E}_{j,j})=f(\mathrm{E}_{j,j}\times\mathrm{E}_{i,j})\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad f(\mathrm{E}_{i,j})=f(\mathbb{O}_n)=0.$$

Question 5.c. Une application répétée de la règle de la question 5.a donne que pour toute famille finie $(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k)$ de matrices ayant une image nulle par f, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{A}_i\right) = 0.$$

Notons $b_{i,j}$ les coefficients de B. Les $b_{i,i}$ sont nuls. Il reste donc

$$\mathrm{B} = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} b_{i,j} \mathrm{E}_{i,j}$$

si bien que $f(\mathrm{B}) = 0$.

Question 5.d. On reprend les notations X et $\mathrm{M}(t)$ de la question 2. Les formules des questions 5.a et 5.c donnent

$$f(\mathrm{XM}(t)) = f\left(\left(\sum_{j=1}^{n} t_j\right)\mathrm{E}_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} t_i\,\mathrm{E}_{i,1}\right) = f\left(\left(\sum_{j=1}^{n} t_j\right)\mathrm{E}_{1,1}\right) = \left|\sum_{j=1}^{n} t_j\right| \times f(\mathrm{E}_{1,1})$$

et

$$f(\mathrm{M}(t)\mathrm{X}) = f\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} t_r \mathrm{E}_{r,j}\right) = f\left(\sum_{r=1}^{n} t_r \mathrm{E}_{r,r}\right).$$

L'égalité $f(\mathrm{M}(t)\mathrm{X}) = f(\mathrm{XM}(t))$ donne donc finalement

$$f\left(\sum_{r=1}^{n} t_r \mathrm{E}_{r,r}\right) = \left|\sum_{j=1}^{n} t_j\right| \times f(\mathrm{E}_{1,1}).$$

Question 5.e. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons ses coefficients $a_{i,j}$. Partons de la décomposition

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,j}\,\mathrm{E}_{i,j}.$$

Les formules des questions 5.a et 5.c donnent

$$f(\mathrm{A}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\mathrm{E}_{i,i}\right).$$

La formule de la question 5.d donne finalement

$$f(\mathrm{A}) = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right| \times f(\mathrm{E}_{1,1}) = |\mathrm{tr}(\mathrm{A})| \times f(\mathrm{E}_{1,1}).$$

Problème II

Question 6. Récurrence.

Question 7. Il suffit de remarquer l'identité $1 = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left((x+\mathrm{i}) - (x-\mathrm{i})\right)$ pour obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right).$$

Question 8. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on en déduit l'expression

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p\,p!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{p+1}} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^{p+1}}\right).$$

Question 9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons θ un argument du nombre complexe $x + \mathrm{i}$. On a alors

$$x + \mathrm{i} = \sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{et} \qquad x - \mathrm{i} = \sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

donc

$$(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1} = (\sqrt{x^2+1})^{p+1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(p+1)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(p+1)}\right) = (x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}\left(2\mathrm{i}\sin(\theta(p+1))\right).$$

On en tire la majoration $\left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}\right| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.

Question 10. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Mettons au même dénominateur dans la formule de la question 8.

$$\varphi_1^{(p)}(x) = \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p\,p!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}\right).$$

La majoration de la question 9 donne alors

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{2} \times \frac{2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}}{(1+x^2)^{p+1}} = \frac{p!}{(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Remarquons alors la minoration $(1+x^2) \geqslant x^2 > 0$, qui donne ensuite $\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}} \leqslant \dfrac{1}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \dfrac{1}{|x|^{p+1}}$ puis

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Question 11. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si a est nul, l'inégalité à obtenir est immédiate. Supposons donc a non nul.

Observons l'identité $\varphi_a(x) = \varphi_1(ax)$. Par une récurrence que je ne détaille pas, on obtient alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_a^{(p)}(x) = a^p\varphi_1^{(p)}(ax).$$

On en déduit la majoration

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |a| \times \left|\varphi_a^{(p)}(x)\right| \leqslant |a| \times |a|^p \times \frac{p!}{|ax|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Question 12. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit un entier $n \geqslant p$. Introduisons la fonction $g_n : x \mapsto x^n$. On observe alors la relation

$$u_n = a_n \times \varphi_{r_n} \times g_n.$$

La formule de Leibniz donne

$$u_n^{(p)} = a_n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} g_n^{(k)} \times \varphi_{r_n}^{(p-k)}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dérivée k-ième de g_n est donnée par

$$g_n^{(k)} : x \mapsto n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k},$$

ce qui donne finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n^{(p)}(x) = a_n \times \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \times \varphi_{r_n}^{(p-k)}(x).$$

Question 13. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'exposant $n-k$ est strictement positif donc x^{n-k} s'annule pour $x = 0$.

La formule de la question précédente donne donc $u_n^{(p)}(0) = 0$.

Dans le calcul de $u_n^{(n)}(x)$, il reste uniquement le terme d'indice $k = n$.

$$u_n^{(n)}(0) = a_n \times \binom{n}{n}\frac{n!}{0!} \times 1 \times \varphi_{r_n}^{(0)}(0) = a_n \times n!.$$

Question 14. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est nul, l'inégalité à démontrer est immédiate. Supposons maintenant que x est non nul. Utilisons l'inégalité triangulaire puis la majoration de la question 11.

$$\left|\sqrt{n!} \times u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \times |r_n| \times \left|\varphi_{r_n}^{(p-k)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \times \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}.$$

En réarrangeant les factorielles, il vient

$$\binom{p}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times (p-k)! = \frac{p!}{(p-k)!k!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times (p-k)! = \binom{n}{k} \times p!$$

donc

$$\left|\sqrt{n!} \times u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} p! |x|^{n-p+1}.$$

L'inégalité $p \leqslant n$ donne ensuite

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

On obtient donc finalement la majoration $\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\, p!\, 2^n$.

Question 15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{|2x|^{n-1}}{\sqrt{n!}} \times 2.$$

On sait que pour tout y réel, le quotient $y^n/n!$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit en particulier que le quotient $|2x|^{2n-2} \times 4^n/n!$ tend vers 0, si bien que $u_n(x)$ est négligeable devant $1/2^n$.

On sait que la série géométrique de terme général $1/2^n$ est convergente donc la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente. Elle converge donc.

On a alors montré que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Question 16. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $s > 0$. Soit un entier $n \geqslant p+1$. L'inégalité de la question 14 donne

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{s^{n-p-1}\, 2^n}{\sqrt{n!}} \times p!.$$

Ce majorant étant indépendant de x, il vient

$$||u_n^{(p)}||_{\infty,[-s,s]} \leqslant \frac{s^{n-p-1}\, 2^n}{\sqrt{n!}} \times p!.$$

Par le même argument qu'à la question précédente, on en déduit que $||u_n^{(p)}||_{\infty,[-s,s]}$ est négligeable devant $1/2^n$ quand n tend vers $+\infty$, si bien que c'est le terme général d'une série convergente.

On a montré que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant p+1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur le segment $[-s, s]$.

Question 17. Rappelons que la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes. On a donc en fait montré que pour $p \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n^{(p)}$ converge normalement sur le segment $[-s, s]$.

Nous avons alors démontré toutes les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme, mais récapitulons-les.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[-s, s]$.

$\boxed{2}$ Pour tout $p \in [\![0, m-1]\!]$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n^{(p)}$ converge simplement sur $[-s, s]$.

$\boxed{3}$ La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n^{(m)}$ converge normalement donc uniformément sur $[-s, s]$.

On en déduit que la fonction U est de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[-s, s]$.
C'est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ donc la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-s, s]$.
C'est vrai pour tout $s > 0$ donc la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Question 18. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n s'annule en 0. Il reste juste $\mathrm{U}(0) = u_0(0) = a_0$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ Le théorème de dérivation employé à la question précédente donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{U}^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

On a vu à la question 13 que pour tout $n \geqslant p+1$, le nombre $u_n^{(p)}(0)$ est nul. On a vu aussi que $u_p^{(p)}(0)$ vaut $p! \times a_p$. Il reste donc

$$\mathrm{U}^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! \times a_p.$$

Question 19. Soit $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Choisissons la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ comme suit.

On prend $a_0 = c_0$ puis, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une fois que $a_0, \ldots, a_{p-1}$ ont été définis, on pose

$$a_p = \frac{1}{p!}\left(c_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right).$$

Pour ce choix des a_p, la fonction U manipulée ci-dessus est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les égalités

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}^{(p)}(0) = c_p.$$

Question 20. Soit $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $x_p = \mathrm{Re}(c_p)$ et $y_p = \mathrm{Im}(c_p)$.
D'après la question précédente, il existe des fonctions U et V de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}^{(p)}(0) = x_p, \quad \mathrm{V}^{(p)}(0) = y_p.$$

On posant $\mathrm{W} = \mathrm{U} + \mathrm{i}\mathrm{V}$, on obtient une fonction W de classe $\mathcal{C}^{infty}$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}^{(p)}(0) = x_p + \mathrm{i}y_p = c_p.$$

Le théorème de Borel est démontré.

Problème III

Question 21. Soit $x > 0$. Les croissances comparées donnent

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \,\mathrm{e}^{-n^2 x} = 0,$$

c'est-à-dire $f_n(x) = \mathrm{o}(1/n^2)$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et ses termes sont positifs donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$, également à termes positifs, est convergente.

C'est vrai pour tout $x > 0$ donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Question 22. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive et décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc

$$||f_n||_{\infty,\ ]0,+\infty[} = \lim_{x\to 0} f_n(x) = n.$$

La série $\sum n$ diverge grossièrement donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Question 23. Soit $r>0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on obtient

$$||f_n||_{\infty,\ [r,+\infty[} = f_n(r).$$

La série $\sum f_n(r)$ est convergente donc la série $\sum ||f_n||_{\infty,\ [r,+\infty[}$ converge. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur l'intervalle $[r,+\infty[$. De plus, toutes les fonctions f_n sont continues sur cet intervalle. Le théorème de continuité permet de conclure que la fonction F est continue sur l'intervalle $[r,+\infty[$.

C'est vrai pour tout $r>0$ donc la fonction F est continue sur $]0,+\infty[$.

Question 24. La fonction g_x est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, avec

$$\forall t\geqslant 0,\qquad g_x'(t) = (1-2t^2x)\mathrm{e}^{-t^2x}.$$

On en déduit que la fonction g_x est croissante sur l'intervalle $[0,1/\sqrt{2x}]$ et décroissante sur l'intervalle $[1/\sqrt{2x},+\infty[$.

Question 25. On connaît l'encadrement

$$n_x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2x}} < n_x+1.$$

On en déduit que la fonction g_x est croissante sur $[0,n_x]$ et décroissante sur $[n_x+1,+\infty[$.

Soit n un entier dans $[\![1,n_x]\!]$. La fonction g_x est croissante sur $[n-1,n]$ donc

$$\forall t\in[n-1,n],\qquad g_x(t)\leqslant g_x(n).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité

$$\int_{n-1}^{n} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(n)\ \mathrm{d}t = g_x(n).$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_0^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{n_x}\int_{n-1}^{n} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{n_x} g_x(n).$$

Soit n un entier dans $[\![n_x+1,\mathrm{N}]\!]$. La fonction g_x est décroissante sur $[n,n+1]$ donc

$$\forall t\in[n,n+1],\qquad g_x(t)\leqslant g_x(n).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient l'inégalité

$$\int_{n}^{n+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n}^{n+1} g_x(n)\ \mathrm{d}t = g_x(n).$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_{n_x+1}^{\mathrm{N}+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=n_x+1}^{\mathrm{N}}\int_{n}^{n+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_x+1}^{\mathrm{N}} g_x(n).$$

En mettant bout à bout les deux grandes inégalités, il vient

$$\int_0^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n).$$

Question 26. La méthode est la même, sauf qu'il y a deux termes à traiter séparément.

Soit n dans $[\![1, n_x - 1]\!]$. La fonction g_x est croissante sur $[n, n+1]$ donc, en passant quelques détails, on obtient

$$g_x(n) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t.$$

La sommation de ces inégalités donne

$$\sum_{n=1}^{n_x-1} g_x(n) \leqslant \sum_{n=1}^{n_x-1} \int_n^{n+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t.$$

Soit n dans $[\![n_x + 2, \mathrm{N}]\!]$. La fonction g_x est décroissante sur $[n-1, n]$ donc

$$g_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(t)\ \mathrm{d}t.$$

La sommation de ces inégalités donne

$$\sum_{n=n_x+2}^{\mathrm{N}} g_x(n) \leqslant \sum_{n=n_x+2}^{\mathrm{N}} \int_{n-1}^{n} g_x(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}} g_x(t)\ \mathrm{d}t.$$

En ajoutant les deux termes manquants, on obtient l'inégalité attendue

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n) \leqslant \int_1^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}} g_x(t)\ \mathrm{d}t + g_x(n_x) + g_x(n_x+1).$$

Question 27. La fonction g_x admet pour primitive sur $[0, +\infty[$ la fonction $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2 x}}{2x}$. Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_x + 1$, on obtient donc l'encadrement

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-n_x^2 x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x} - \mathrm{e}^{-(\mathrm{N}+1)^2 x}}{2x} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-n_x^2 x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{N}^2 x}}{2x} + g_x(n_x) + g_x(n_x+1).$$

Faisons tendre N vers $+\infty$. On obtient

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-n_x^2 x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}}{2x} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-n_x^2 x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}}{2x} + g_x(n_x) + g_x(n_x+1).$$

Pour finir, rappelons que l'étude des variations de la fonction g_x a révélé qu'elle est maximale en $1/\sqrt{2x}$. On obtient donc l'inégalité

$$g_x(n_x) \leqslant g_x\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2x}}\ \mathrm{e}^{-1/2}$$

et l'inégalité $g_x(n_x+1) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\ \mathrm{e}^{-1/2}$ est valable pour la même raison. On obtient donc l'encadrement

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-n_x^2 x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}}{2x} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-n_x^2 x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}}{2x} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Question 28. Prenons $x > 0$ et multiplions par $2x$ dans l'inégalité précédente

$$1 - \mathrm{e}^{-n_x^2 x} + \mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x} \leqslant 2x\mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-n_x^2 x} + \mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x} + 2\sqrt{2x}\ \mathrm{e}^{-1/2}.$$

On connaît l'encadrement

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} - 1 \leqslant n_x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2x}},$$

qui donne ensuite

$$1 - \sqrt{2x} \leqslant \sqrt{2x}\ n_x \leqslant 1.$$

Par le théorème des gendarmes, le produit $\sqrt{2x}n_x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. On en déduit que $\mathrm{e}^{-n_x^2 x}$ tend vers $\mathrm{e}^{-1/2}$ (par continuité de l'exponentielle).

On prouve de la même manière que $\mathrm{e}^{-(n_x+1)^2 x}$ tend vers $\mathrm{e}^{-1/2}$ quand x tend vers 0.

Finalement, les deux termes qui encadrent $2x\mathrm{F}(x)$ tendent vers 1 quand x tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $2x\mathrm{F}(x)$ tend vers 1 aussi. Finalement, on a prouvé que $\mathrm{F}(x)$ est équivalent à $1/2x$ quand x tend vers 0.
