PC* — mathématiques **jeudi 28 novembre 2019**
Devoir surveillé n° 3 — piste rouge **durée : 4 heures**

Problème I — commutateurs et endomorphismes de trace nulle

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Pour tout couple (u, v) d'endomorphismes de E, on introduit *le commutateur du couple* (u, v), qui est l'endomorphisme de E défini par

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u.$$

On note $\mathcal{C}(\mathrm{E})$ l'ensemble de tous les commutateurs de couples d'endomorphismes de E, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}(\mathrm{E}) = \{[u, v]\ ;\ (u, v) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E}))^2\}.$$

D'autre part, on note $\mathcal{T}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la trace est nulle.

$$\mathcal{T}(\mathrm{E}) = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})\ ;\ \mathrm{tr}(f) = 0\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces deux ensembles sont égaux.

Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la dimension de E. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'assertion « pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, on a l'égalité $\mathcal{C}(\mathrm{E}) = \mathcal{T}(\mathrm{E})$. »

Question 1. Montrer les assertions P_0 et P_1.

Question 2. Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, vérifier l'inclusion $\mathcal{C}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{T}(\mathrm{E})$.

Question 3. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E.

On suppose que pour tout vecteur x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée.

On se donne une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. En considérant les des vecteurs de la forme $f(e_1 + e_j)$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f = \alpha \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Pour toute la fin de ce problème, on prend un entier $n \geqslant 2$ pour lequel l'assertion P_{n-1} est vraie et on va prouver que P_n est vraie.

On considère donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. L'inclusion $\mathcal{C}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{T}(\mathrm{E})$ étant connue, on va prouver l'inclusion réciproque.

L'endomorphisme nul de E appartient évidemment à $\mathcal{C}(\mathrm{E})$. On se donne donc un élément f non nul de $\mathcal{T}(\mathrm{E})$.

Question 4. Montrer que f n'est pas un multiple de Id_E.

Question 5. Montrer l'existence d'un vecteur e_1 de E tel que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

Question 6. En déduire l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice A qui représente f dans cette base ait la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{X} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix},$$

où X et Y sont des éléments de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et la matrice A_1 est un élément de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle.

Question 7. Montrer l'existence de U et V dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{UV} - \mathrm{VU} = \mathrm{A}_1$.

On considère de telles matrices U et V dans la suite.

Question 8. Montrer l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que la matrice $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}$ soit inversible.

On fixe un tel α. On se donne deux vecteurs colonnes R et S dans $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et on leur associe des matrices U' et V' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ainsi

$$\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{U} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{R} \\ \mathrm{S} & \mathrm{V} \end{pmatrix}.$$

Question 9. Calculer la matrice $\mathrm{U}'\mathrm{V}' - \mathrm{V}'\mathrm{U}'$ puis montrer qu'il est possible de choisir les colonnes R et S de sorte que cette matrice soit égale à A.

Question 10. Conclure.

Problème II — théorème de densité de Weierstraß

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant [1] et d'en étudier deux applications.

Théorème. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Dans tout ce problème, on utilise la notation

$$||f||_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|\,.$$

Partie 1 — démonstration du théorème de Weierstraß

Question 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

Question 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

Question 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.

Question 14. Trouver une constante $\mathrm{C} > 0$ (indépendante de x et de n) vérifiant la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \mathrm{C}\,n.$$

Question 15. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire la majoration

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

On considère maintenant une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On fixe $\varepsilon > 0$. On admet [2] qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple (x,y) d'éléments de $[0,1]$, on ait l'implication

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

et on fixe un tel α pour la suite du problème.

Pour tout élément x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, on partitionne l'ensemble $[\![0,n]\!]$ en

$$\mathrm{X}_n(x) = \left\{ k \in [\![0,n]\!]\ ;\ \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}_n(x) = \left\{ k \in [\![0,n]\!]\ ;\ \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ la fonction polynomiale [3] B_n suivante

$$\mathrm{B}_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Question 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, prouver la majoration

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,||f||_\infty \sum_{k\in \mathrm{Y}_n(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

puis

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\frac{||f||_\infty}{\alpha}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

Question 17. En déduire que la suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

---

1. Démontré par Karl Weierstrass en 1885 puis généralisé par Marshall H. Stone en 1937.
2. Ce fait s'appelle la *continuité uniforme*. Il découle du *théorème de Heine*, qui affirme que toute fonction continue sur un segment est *uniformément continue*. Ce théorème n'est pas à notre programme, ni même cette notion.
3. Les fonctions B_n sont les *polynômes de Bernstein* associés à la fonction f. Ces polynômes sont notamment utilisés dans la définition des *courbes de Bézier*, utilisées dans tous les logiciels de graphisme.

Partie 2 — lemme de Riemann-Lebesgue

Dans cette partie, on démontre un cas particulier du *lemme de Riemann-Lebesgue*, dont voici l'énoncé.

Lemme. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t = 0.$$

Question 18. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Prenons maintenant une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et associons-lui la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ de la première partie.

Question 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, démontrer la majoration

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t\right| + ||f - \mathrm{B}_n||_\infty.$$

Question 20. Conclure (on utilisera un ε).

Partie 3 — détermination d'un orthogonal

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, que l'on munit du produit scalaire $(\ |\ )$ défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales.

Question 21. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que la fonction

$$\varphi_f : g \mapsto (f|g),$$

définie de E vers $\mathbb{R}$, est lipschitzienne relativement à la norme $||\ ||_\infty$.

Question 22. Soit $f \in \mathrm{F}^\perp$. On lui associe la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ de la première partie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\varphi_f(\mathrm{B}_n)$. En déduire que f est la fonction nulle.

On a alors montré que $\mathrm{F}^\perp$ est réduit au vecteur nul.

Problème III — matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de cet exercice est de montrer que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On note P_1 et P_2 les matrices réelles vérifiant la relation $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{P}_2$.

On définit alors de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ la fonction $f : t \mapsto \mathrm{dét}(\mathrm{P}_1 + t\mathrm{P}_2)$.

Question 23. Montrer que f est une fonction polynomiale non nulle.

Question 24. Montrer les égalités $\mathrm{P}_1\mathrm{B} = \mathrm{AP}_1$ et $\mathrm{P}_2\mathrm{B} = \mathrm{AP}_2$.

Question 25. Conclure.
