PC* — mathématiques **jeudi 28 novembre 2019**
Corrigé du devoir surveillé n° 3 — piste rouge

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 3 — piste rouge

---

Problème I

Question 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 0. Cet espace vectoriel contient uniquement un élément, à savoir son vecteur nul. L'unique endomorphisme φ est donc l'unique application de E dans E, à savoir $f : 0_{\mathrm{E}} \mapsto 0_{\mathrm{E}}$. Cette application est un commutateur, à savoir $[0_{\mathrm{E}}, 0_{\mathrm{E}}]$. Quant à décider si sa trace est nulle, c'est un peu délicat, dans la mesure où il n'est pas possible de la représenter par une matrice [1]. La question est donc un peu bancale pour $n = 0$ et je plaide coupable de ne pas y avoir réfléchi au moment d'ajouter ce cas à l'énoncé.

Soit E un espace vectoriel de dimension 1. L'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est alors de dimension $1^2 = 1$ et ses éléments sont les multiples de Id_{E} (comme dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}$).

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ commutent entre eux donc tous les commutateurs sont nuls, ce qui donne $\mathcal{C}(\mathrm{E}) = \{0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}\}$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{tr}(\alpha \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \alpha$ donc seul l'endomorphisme nul de E est de trace nulle, ce qui donne l'égalité $\mathcal{T}(\mathrm{E}) = \{0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}\}$.

On a prouvé l'égalité $\mathcal{T}(\mathrm{E}) = \mathcal{C}(\mathrm{E})$ dans ce cas.

L'assertion P_1 est démontrée.

Question 2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $w \in \mathcal{C}(\mathrm{E})$. Prenons u et v dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifiant l'égalité $w = [u, v]$. On obtient alors

$$\mathrm{tr}(w) = \mathrm{tr}(u \circ v - v \circ u) = \mathrm{tr}(u \circ v) - \mathrm{tr}(v \circ u) = 0 \qquad \text{donc} \qquad w \in \mathcal{T}(\mathrm{E}).$$

On a prouvé l'inclusion $\mathcal{C}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{T}(\mathrm{E})$.

Question 3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tel que $f(e_k) = \alpha_k e_k$.

Soit $j \in [\![2, n]\!]$. Il existe alors $\beta_j \in \mathbb{C}$ tel que $f(e_1 + e_j) = \beta_j(e_1 + e_j)$. Par linéarité de f, on obtient

$$f(e_1) + f(e_j) = \beta_j(e_1 + e_j) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \alpha_1 e_1 + \alpha_j e_j = \beta_j e_1 + \beta_j e_j.$$

La famille (e_1, e_j) étant libre, il vient $\alpha_1 = \beta_j$ et $\alpha_j = \beta_j$ donc $\alpha_1 = \alpha_j$.

Les coefficients α_j sont donc tous égaux à α_1 et la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$ est donc $\alpha_1 \mathrm{I}_n$, si bien que $f = \alpha_1 \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Question 4. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. On obtient alors $\mathrm{tr}(f) = \lambda \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \lambda n$. Or la trace de f est nulle donc $\lambda = 0$ donc f est l'endomorphisme nul, mais cela contredit les hypothèses de l'énoncé.

Par l'absurde, on a prouvé que f n'est pas un multiple de Id_{E}.

Question 5. D'après la contraposée du résultat de la question 3, on en déduit qu'il existe au moins un vecteur e_1 de E tel que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

---

1. Sauf éventuellement par la matrice vide, mais celle-ci ne fait pas partie de notre bestiaire.

Question 6. On pose $e_2 = f(e_1)$ et on complète la famille libre (e_1, e_2) en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Notons A la matrice représentative de f dans cette base. La première colonne de A est alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{X} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}$ pour un certain triplet $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{A}_1) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})^2 \times \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

De plus, l'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}_1)$ donne que A_1 est de trace nulle.

Question 7. La matrice A_1 est de trace nulle. Notons f_1 l'endomorphisme $\mathrm{Z} \mapsto \mathrm{A}_1 \times \mathrm{Z}$ de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$. Il est représenté par A_1 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$.

Cet espace vectoriel est de dimension $n-1$ donc, d'après l'assertion P_{n-1}, dont l'énoncé a supposé qu'il est vrai, il existe des endomorphismes u et v de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ tels que $[u, v] = f_1$.

En notant U et V les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ canoniquement associées à u et v respectivement, on a alors réalisé l'égalité $\mathrm{UV} - \mathrm{VU} = \mathrm{A}_1$.

Question 8. Le polynôme caractéristique de U est de degré $n - 1 \geqslant 1$ donc l'ensemble de ses racines est fini. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ qui ne soit pas une valeur propre de U. Pour un tel α, la matrice $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}$ est inversible.

Question 9. Le calcul donne

$$\mathrm{U'V'} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\, {}^t\mathrm{R} \\ \mathrm{US} & \mathrm{UV} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V'U'} = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{RU} \\ \alpha\mathrm{S} & \mathrm{VU} \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{U'V'} - \mathrm{V'U'} = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{R}(\alpha \mathrm{I}_n - \mathrm{U}) \\ (\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_n)\mathrm{S} & \mathrm{UV} - \mathrm{VU} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en choisissant $\mathrm{R} = {}^t(\alpha \mathrm{I}_n - \mathrm{U})^{-1}\mathrm{X}$ et $\mathrm{S} = (\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_n)^{-1}\mathrm{Y}$, on a $\mathrm{U'V'} - \mathrm{V'U'} = \mathrm{A}$.

Question 10. Notons u' et v' les endomorphismes de E représentés par U′ et V′ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On a alors l'égalité $f = [u, v]$ donc f est un élément de $\mathcal{C}(\mathrm{E})$.

On a alors prouvé l'inclusion $\mathcal{T}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{E})$. L'inclusion réciproque étant connue, on a prouvé l'égalité $\mathcal{T}(\mathrm{E}) = \mathcal{C}(\mathrm{E})$.

Cela ayant été prouvé pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, l'assertion P_n est vraie.

On a vu que l'assertion P_1 est vraie et que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'assertion P_{n-1} implique P_n. Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion P_n est vraie.

Problème II

Commentaire. Ce problème est extrait et adapté de Mines-Ponts PSI 2019 maths 2.

Les premières questions se résolvent très rapidement si on reconnaît qu'il s'agit d'espérances relatives à une loi binomiale. Le fait que l'énoncé passe complètement sous silence cet aspect ressemble à un choix délibéré d'inciter les candidats et les candidates à effectuer des calculs inutilement longs. Je ne cautionne pas ce parti-pris, mais j'ai préféré reproduire les questions telles quelles afin de vous préparer à ce genre de turpitude.

Question 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. La formule du binôme donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1.$$

Question 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$.

Premier cas. On suppose que n est nul. On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 0 \times \binom{0}{0}x^0(1-x)^0 = 0 = 0 \times x.$$

Deuxième cas. On suppose que $n \geqslant 1$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, observons la relation

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

On en tire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 0 + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Le décalage d'indice $i = k-1$ donne alors

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n \times \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}x^{\ell+1}(1-x)^{n-1-\ell} = nx\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}x^{\ell}(1-x)^{n-1-\ell}.$$

La formule du binôme donne finalement

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx \times (x+1-x)^{n-1} = nx.$$

Version courte. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$ sur un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$. On rappelle que cette loi est donnée par

$$\mathrm{X}(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

La somme à calculer s'écrit donc

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

et on sait que cette espérance vaut nx.

En fait, le calcul ci-dessus est précisément le calcul de cette espérance effectué en première année.

Question 13. Cette fois, on décompose k^2 en $k + k^2 - k = k + k(k-1)$. Pour tout entier $k \in [\![2,n]\!]$, on obtient alors

$$k(k-1)\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

La somme demandée s'écrit donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Le décalage d'indice $\ell = k-2$ dans la deuxième somme donne alors

$$\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)\sum_{\ell}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}x^{\ell+2}(1-x)^{n-2-\ell} = n(n-1)x^2 \times (x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2.$$

En exploitant le calcul de la question précédente, il vient donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

Version courte de ce calcul inutile. Avec les mêmes notations que précédemment, la formule du transfert donne

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2).$$

La formule de König-Huygens [2] donne par ailleurs $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}) + (\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) + (nx)^2 = nx - nx^2 + n^2x^2 = nx + n(n-1)x^2.$$

Question 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. En développant, on obtient $(k-nx)^2 = k^2 - 2nxk + n^2x^2$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2 - 2nx \times nx + n^2x^2 = nx - nx^2 = nx(1-x).$$

Version courte (juste pour dire que les questions précédentes sont en fait inutiles). La formule du transfert donne

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{E}((\mathrm{X}-nx)^2) = \mathbb{E}((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}) = nx(1-x).$$

Le fait que x soit dans $[0,1]$ donne $x(1-x) \leqslant 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant n.$$

Remarque. L'énoncé ne demande pas une majoration optimale, si bien que le choix C convient, mais une étude rapide montre que la valeur maximale de $x(1-x)$, quand x varie dans $[0,1]$, est $1/4$.

Question 15. Commençons par mettre $1/n$ en facteur afin d'avoir une expression qui ressemble davantage aux expressions précédentes.

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |nx-k| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Dans le cas des sommes finies, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (b_k)^2}.$$

Afin d'exploiter l'inégalité de la question précédente, il semble logique de choisir a_k (ou b_k, mais les rôles sont interchangeables) comme suit

$$a_k = \sqrt{(k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} = |k-nx| \times \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}.$$

Afin d'avoir $a_k b_k = |nx-k| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, il n'y a plus qu'à choisir

$$b_k = \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}.$$

Avec ce choix, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} |nx-k| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}},$$

2. Également connue sous le nom de *théorème de Pythagore*.

et on en tire la majoration

$$\sum_{k=0}^{n} |nx-k| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 1 \times \sqrt{\mathrm{C}n} \qquad \text{puis} \qquad \sum_{k=0}^{n} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

Remarque. Dans le cours de probabilités, on a aussi l'inégalité $\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2) \geqslant \mathbb{E}(\mathrm{Y})^2$, qui découle de la positivité de la variance. En appliquant cette inégalité à la variable aléatoire $\mathrm{Y} = |\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})|$, on obtient directement la majoration demandée.

Question 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,1]$. Commençons par exploiter la relation de la question 11 pour écrire

$$\mathrm{B}_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right).$$

On applique ensuite l'inégalité triangulaire et on sépare la somme en deux comme suggéré par l'énoncé

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k \in \mathrm{X}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| + \sum_{k \in \mathrm{Y}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|.$$

La première somme se majore en exploitant l'implication $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$\sum_{k \in \mathrm{X}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \sum_{k \in \mathrm{X}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\varepsilon \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon.$$

Pour la deuxième somme, on majore bourrinement par l'inégalité triangulaire

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leqslant 2\,||f||_\infty,$$

ce qui donne

$$\sum_{k \in \mathrm{Y}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant 2\,||f||_\infty \sum_{k \in \mathrm{Y}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

On en tire la première inégalité demandée. Pour la deuxième, l'astuce est de remarquer pour tout $k \in \mathrm{Y}_n(x)$ la majoration

$$1 \leqslant \frac{1}{\alpha}\left|x - \frac{k}{n}\right|.$$

On obtient donc

$$\sum_{k \in \mathrm{Y}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k \in \mathrm{Y}_n(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \times \left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \times \left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \times \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

Tout ceci donne donc finalement $|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\dfrac{||f||_\infty}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\mathrm{C}}{n}}$.

Question 17. Le majorant ci-dessus est indépendant de x donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||\mathrm{B}_n - f||_\infty \leqslant \varepsilon + 2\frac{||f||_\infty}{\alpha}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

Le majorant tend vers ε quand n tend vers $+\infty$ donc il existe un rang $n_0 > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad ||\mathrm{B}_n - f||_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a montré alors ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad ||\mathrm{B}_n - f||_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela signifie que la suite de terme général $||\mathrm{B}_n - f||_\infty$ converge vers 0. La suite de fonctions $(\mathrm{B}_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[0,1]$.

Question 18. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Prenons $x > 0$. On réalise une intégration par parties en dérivant f et en primitivant la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$.

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{\mathrm{i}x}\right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - f(0)}{\mathrm{i}x} - \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit la majoration

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

Le majorant tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc, par le théorème des gendarmes, la quantité $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 aussi.

Question 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant l'égalité $f = f - \mathrm{B}_n + \mathrm{B}_n$, il vient par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - \mathrm{B}_n(t))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

On applique alors l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1 (f(t) - \mathrm{B}_n(t))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right|.$$

Observons ensuite les inégalités

$$\left|\int_0^1 (f(t) - \mathrm{B}_n(t))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t) - \mathrm{B}_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 ||f - \mathrm{B}_n||_\infty\,\mathrm{d}t = ||f - \mathrm{B}_n||_\infty.$$

On en déduit l'inégalité demandée

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant ||f - \mathrm{B}_n||_\infty + \left|\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right|.$$

Question 20. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstraß, on peut choisir un entier n tel que $||f - \mathrm{B}_n||_\infty \leqslant \varepsilon$.

La fonction B_n étant de classe $\mathcal{C}^1$, la question précédente donne l'existence de $x_0 > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \left|\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors montré ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 > 0, \quad \forall x \geqslant x_0, \quad \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc prouvé que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Question 21. Soit $g \in \mathbb{N}$. On trouve directement

$$|\varphi_f(g)| \leqslant \int_0^1 |f(t)\,g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant ||f||_\infty \times ||g||_\infty.$$

La fonction φ_f est donc $||f||_\infty$-lipschitzienne.

Question 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est dans $\mathrm{F}^\perp$ et B_n est dans F donc $(f|\mathrm{B}_n) = 0$ donc $\varphi_f(\mathrm{B}_n) = 0$.

La fonction φ_f étant lipschitzienne pour la norme $|| \, ||_\infty$, elle est continue pour cette norme.

On sait que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour cette norme. On en déduit que la suite de terme général $\varphi_f(\mathrm{B}_n)$ converge vers $\varphi_f(f)$.

Par unicité de la limite, on obtient $\varphi_f(f) = 0$, c'est-à-dire $(f|f) = 0$. La fonction f est donc la fonction nulle.

Problème III

Question 23. Notons $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n$ les colonnes de P_1 et $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n$ les colonnes de P_2.

Soit $t \in \mathbb{C}$. On a alors

$$f(t) = \mathrm{dét}(\mathrm{Q}_1 + t\mathrm{R}_1|\mathrm{Q}_2 + t\mathrm{R}_2|\cdots|\mathrm{Q}_n + t\mathrm{R}_n).$$

On développe par multilinéarité selon les colonnes. On obtient une somme de 2^n termes de la forme

$$t^k \ \mathrm{dét}(\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2|\cdots|\mathrm{C}_n),$$

où C_i désigne Q_i ou R_i et k est le nombre d'indices i pour lesquels C_i désigne R_i. La fonction f est donc polynomiale.

De plus, on a $f(\mathrm{i}) = \mathrm{dét}(\mathrm{P}) \neq 0$ donc f n'est pas la fonction nulle.

Question 24. L'égalité $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ donne $\mathrm{PB} = \mathrm{AP}$ puis

$$\mathrm{P}_1\mathrm{B} + \mathrm{i}\mathrm{P}_2\mathrm{B} = \mathrm{AP}_1 + \mathrm{i}\mathrm{AP}_2.$$

Les matrices $\mathrm{P}_1\mathrm{B}, \mathrm{P}_2\mathrm{B}, \mathrm{AP}_1, \mathrm{AP}_2$ sont toutes à coefficients réels.

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires coefficient par coefficient, il vient $\mathrm{P}_1\mathrm{B} = \mathrm{AP}_1$ et $\mathrm{P}_2\mathrm{B} = \mathrm{AP}_2$.

Question 25. La fonction f étant polynomiale et non nulle, elle n'a qu'un nombre fini de racines complexes. On peut donc choisit t réel tel que $f(t) \neq 0$.

Pour un tel t, la matrice $\mathrm{S} = \mathrm{P}_1 + t\mathrm{P}_2$ est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et en combinant les égalités de la question précédente, on obtient $\mathrm{SB} = \mathrm{AS}$ puis $\mathrm{B} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}$.

Les matrices A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
