

Corrigé du devoir en temps libre n° 4

Exercice 1

I.1. Remarquons pour commencer l'inclusion $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(a^2)$, valable car l'égalité $a(x) = 0$ implique $a(a(x)) = 0$.

Supposons que A possède un pseudo-inverse B . Notons b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par B dans la base $\mathcal{B}$. On a alors les égalités $a \circ b \circ a = a$ et $a \circ b = b \circ a$ donc $b \circ a^2 = a$, or le noyau de $b \circ a^2$ contient celui de a^2 donc $\text{Ker}(a)$ contient $\text{Ker}(a^2)$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(a^2)$. À l'aide de la formule du rang on déduit l'égalité $\text{rg}(a) = n - \dim(\text{Ker}(a)) = n - \dim(\text{Ker}(a^2)) = \text{rg}(a^2)$, puis $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$, le rang d'une matrice étant égal à celui d'une application linéaire qu'elle représente.

I.2.a. L'hypothèse $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$ donne l'égalité $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$ puis $\dim(\text{Ker}(a)) = \dim(\text{Ker}(a^2))$ grâce à la formule du rang. On connaît l'inclusion $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(a^2)$. Comme ces noyaux ont la même dimension, on en déduit qu'ils sont égaux : $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(a^2)$.

Montrons maintenant que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, considérons x dans $\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(a)$. L'appartenance de x à $\text{Im}(a)$ nous permet de prendre y dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'égalité $a(y) = x$. L'appartenance de x à $\text{Ker}(a)$ donne l'égalité $a(x) = 0$ c'est-à-dire $a^2(y) = 0$. Ainsi, le vecteur y est dans $\text{Ker}(a^2)$, c'est-à-dire $\text{Ker}(a)$, donc $a(y)$ est nul, donc x est nul.

On a montré que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont en somme directe. De plus, la somme de leur dimension vaut $\dim(\mathbb{R}^n)$ d'après la formule du rang. On en déduit que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

I.2.b. Comme les espaces $\text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, il existe une base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(c_1, \dots, c_r)$ soit une base de $\text{Im}(a)$ et $(c_{r+1}, \dots, c_n)$ soit une base de $\text{Ker}(a)$.

Comme l'image $\text{Im}(a)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(a)$ dans $\mathbb{R}^n$, la restriction $\tilde{a}$ de a à $\text{Im}(a)$ est un isomorphisme de $\text{Im}(a)$ sur $\text{Im}(a)$: c'est un automorphisme de $\text{Im}(a)$. En particulier, si l'on note C la matrice de cet automorphisme dans la base $(c_1, \dots, c_r)$ de $\text{Im}(a)$, cette matrice est inversible.

De plus, la matrice de a dans la base $\mathcal{C}$ s'écrit par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les $n - r$ dernières colonnes sont nulles car elles représentent les vecteurs $a(e_k)$ pour $k \in \llbracket r + 1, n \rrbracket$. Les r premières colonnes représentent les vecteurs $a(e_k)$ pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Ceux-ci appartiennent à $\text{Im}(a)$, ce qui explique le bloc nul en bas à gauche.

Notons maintenant W la matrice qui représente la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Cette matrice est inversible et la formule de changement de base donne :

$$A = M_{\mathcal{B}}(a) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \times M_{\mathcal{C}}(a) M_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = W \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

I.2.c. Notons B la matrice $W \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$. Je laisse le lecteur ou la lectrice se convaincre que B est un pseudo-inverse de A .

II.1.a. On utilise ici l'hypothèse $AB = BA$, qui entraîne l'égalité $a \circ b = b \circ a$.

Soit x dans $\text{Ker}(a)$. On a alors : $a(b(x)) = b(a(x)) = b(0) = 0$, donc $b(x) \in \text{Ker}(a)$.

Soit x dans $\text{Im}(a)$. Il existe y dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'égalité $a(y) = x$. On en déduit l'égalité $b(x) = b(a(y)) = a(b(y))$, qui prouve que $b(x)$ appartient à $\text{Im}(a)$.

On a prouvé que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par b .

II.1.b. L'égalité $a \circ b \circ a = b$ montre que le noyau de a est contenu dans celui de b . Le vecteur $b(c_k)$ est donc nul pour tout indice k dans $\llbracket r+1, n \rrbracket$. De plus, pour tout k dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, le vecteur $b(c_k)$ est un élément de $\text{Im}(a)$, si bien qu'il est une combinaison linéaire des vecteurs $c_1, \dots, c_r$.

Ainsi, la matrice de b dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où D est un élément de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Plus précisément, la matrice D représente la restriction de b au sous-espace $\text{Im}(a)$ dans la base $(c_1, \dots, c_r)$ de ce sous-espace.

La formule de changement de base donne alors l'égalité $B = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$.

II.2.a. De l'égalité $a \circ b \circ a = a$, on tire $(a \circ b \circ a) \circ b = a \circ b$, c'est-à-dire $(a \circ b)^2 = a \circ b$, ce qui prouve que $a \circ b$ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

II.2.b. On connaît déjà l'inclusion $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(b \circ a) = \text{Ker}(a \circ b)$. L'égalité $a \circ b \circ a = a$ montre aussi l'inclusion de $\text{Ker}(b \circ a)$ dans $\text{Ker}(a)$. On obtient donc l'égalité $\text{Ker}(a \circ b) = \text{Ker}(b \circ a) = \text{Ker}(a)$. On pourrait d'ailleurs montrer pareillement l'égalité $\text{Ker}(b) = \text{Ker}(a)$.

De même, on connaît l'inclusion $\text{Im}(a \circ b) \subset \text{Im}(a)$ et l'égalité $a = a \circ b \circ a$ donne l'inclusion réciproque $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a \circ b)$, d'où l'égalité $\text{Im}(a \circ b) = \text{Im}(a)$.

II.2.c. Le produit $W^{-1}ABW$ vaut $\begin{pmatrix} CD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que CD représente dans la base $(c_1, \dots, c_r)$ la restriction à $\text{Im}(a)$ de l'endomorphisme $a \circ b$. Comme l'espace $\text{Im}(a)$ est l'image du projecteur $a \circ b$, les vecteurs de $\text{Im}(a)$ sont fixés par $a \circ b$. L'endomorphisme de $\text{Im}(a)$ induit par $a \circ b$ est donc l'identité, et la matrice CD est I_r .

II.3. On a montré à la question précédente que la matrice D est nécessairement l'inverse de C , ce qui prouve qu'il n'y a qu'une matrice B qui soit un pseudo-inverse de A .

Exercice 2. On fait l'hypothèse $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$. Comme dans l'exercice 2, on prouve facilement l'inclusion $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$. Ces deux espaces vectoriels ont de plus la même dimension ; on en déduit qu'ils sont égaux

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im}(v).$$

Soit y un élément de F . Le vecteur $v(y)$ appartient à $\text{Im}(v)$ donc à $\text{Im}(v \circ u)$. Il existe donc un vecteur x de E vérifiant l'égalité $v(y) = v(u(x))$. On obtient alors l'égalité

$$v(y - u(x)) = 0_G,$$

si bien que le vecteur $y - u(x)$ appartient à $\text{Ker}(v)$. La décomposition

$$y = y - u(x) + u(x)$$

prouve que y est dans $\text{Ker}(v) + \text{Im}(u)$. On a prouvé l'inclusion $F \subset \text{Ker}(v) + \text{Im}(u)$. L'inclusion réciproque est connue donc ces deux espaces vectoriels sont égaux. On a prouvé l'implication

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im}(v) \Rightarrow F = \text{Ker}(v) + \text{Im}(u).$$

Réciproquement, on fait l'hypothèse $F = \text{Ker}(v) + \text{Im}(u)$.

Comme signalé précédemment, l'inclusion $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$ est acquise.

Réciproquement, prenons un élément z de $\text{Im}(v)$. Il existe alors un élément y de F vérifiant l'égalité $z = v(y)$. L'hypothèse garantit l'existence de y_1 dans $\text{Ker}(v)$ et y_2 dans $\text{Im}(u)$ tels que $y = y_1 + y_2$. Il existe également un vecteur x_2 de E tel que $y_2 = u(x_2)$. On obtient donc

$$y = y_1 + u(x_2) \quad \text{puis} \quad z = v(y) = v(y_1) + v(u(x_2)) = v(u(x_2))$$

donc z est dans $\text{Im}(v \circ u)$. On a prouvé l'inclusion $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(v \circ u)$. Par double inclusion, les espaces vectoriels $\text{Im}(v)$ et $\text{Im}(v \circ u)$ sont égaux. Leurs dimensions sont donc égales.

On a prouvé l'implication

$$F = \text{Ker}(v) + \text{Im}(u) \Rightarrow \text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v).$$

Au final, on a prouvé l'équivalence

$$F = \text{Ker}(v) + \text{Im}(u) \iff \text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v).$$

Exercice 3. a. Soit x dans $]0, +\infty[$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_{n-1}(x) &= \ln \left(\frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} \right) = \ln \left(\frac{n! \times n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \times \frac{x(x+1) \cdots (x+n-1)}{(n-1)!(n-1)^x} \right) \\ &= \ln \left(\frac{n}{n+x} \times \left(\frac{n}{n-1} \right)^x \right) = -\ln \left(\frac{n+x}{n} \right) - x \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \\ &= -\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - x \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Rappelons le développement limité

$$\ln(1+u) = u + \mathcal{O}_{u \rightarrow 0}(u^2).$$

On en déduit

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = -\frac{x}{n} - x \left(-\frac{1}{n} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison, la série de terme général $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ converge absolument. On en déduit qu'elle converge.

On a alors prouvé que la série de fonctions $\sum (f_n - f_{n-1})$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b. Soit x dans $]0, +\infty[$. La série des différences $\sum (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ converge donc la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(\exp(f_n(x)))_{n \geq 1}$ converge. Autrement dit, la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ converge.

On a prouvé que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c. Soit x dans $]0, +\infty[$. Prenons un entier $N \geq 2$. Le calcul de la première question donne

$$\sum_{n=2}^N (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = \sum_{n=2}^N \left(-\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - x (\ln(n) - \ln(n-1)) \right).$$

Effectuons les télescopes.

$$f_N(x) - f_1(x) = -\sum_{n=2}^N \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - x (\ln(N) - \ln(1)).$$

On trouve $f_1(x) = -\ln(x) - \ln(x+1)$ donc

$$f_N(x) = -\ln(x) - \ln(x+1) - \sum_{n=2}^N \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - x \ln(N) = -\ln(x) - \sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - x \ln(N).$$

Faisons apparaître la quantité

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n),$$

dont on sait qu'elle tend vers γ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

$$f_n(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^N \left(-\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) + \frac{x}{n} \right) - x u_n.$$

Quand on fait tendre n vers $+\infty$, on sait que $f_n(x)$ a une limite, qu'on note $F(x)$, et que u_n tend vers γ . On en déduit que la série de terme général $-\ln(1 + \frac{x}{n}) + \frac{x}{n}$ converge¹ et on obtient l'égalité

$$F(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n} \right) - x\gamma.$$

La continuité de l'exponentielle donne $G(x) = \exp(F(x))$. En particulier, le nombre $G(x)$ est strictement positif et on obtient l'égalité $F(x) = \ln(G(x))$, qui donne finalement

$$\ln(G(x)) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n} \right) - x\gamma.$$

d. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$a_n : x \mapsto \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction a_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$a'_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)}.$$

2 La série de fonctions $\sum a_n$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3 Prenons a et b dans $]0, +\infty[$ tels que $a < b$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in [a, b], \quad |a'_n(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} \leq \frac{b}{n^2}.$$

Le majorant ne dépend pas de x donc on obtient la majoration

$$\|a'_n\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{b}{n^2}.$$

Ce majorant prouve que la série $\sum \|a'_n\|_{\infty}^{[a,b]}$ est convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum a'_n$ converge normalement sur $[a, b]$; elle converge donc uniformément sur ce segment.

On a donc prouvé que la série $\sum a'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

D'après ces trois vérifications, on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme et affirmer que la somme de la série de fonctions $\sum a_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, avec une dérivée qui s'obtient en dérivant terme à terme.

La fonction $x \mapsto -\gamma x - \ln(x)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, de dérivée $x \mapsto -\gamma - 1/x$. La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right).$$

La relation $G = \exp \circ F$ prouve que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = G(x) \times F'(x).$$

En particulier, on trouve $G'(1) = G(1)F'(1)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on trouve

$$g_n(1) = \frac{n! \times n}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $G(1) = 1$.

1. Un développement limité l'aurait donné directement.

Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Un télescopage donne

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

puis

$$F'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\gamma$$

puis $G'(1) = -\gamma$.

e. Prenons un entier $p \geq 2$.

[1] Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction a_n est de classe $\mathcal{C}^p$; de plus, pour tout entier k dans $\llbracket 2, p \rrbracket$, la dérivée k -ième de a_n est donnée par

$$a_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(x+n)^k}.$$

[2] On a déjà vu que les séries de fonctions $\sum a_n$ et $\sum a'_n$ convergent simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Prenons k dans $\llbracket 2, p-1 \rrbracket$. Soit x dans $]0, +\infty[$. On remarque l'équivalent

$$|a_n^{(k)}(x)| \sim \frac{(k-1)!}{n^k}$$

quand n tend vers $+\infty$. L'équivalent obtenu est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série $\sum a_n^{(k)}(x)$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

On a prouvé que la série de fonctions $\sum a_n^{(k)}$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

[3] Prenons a et b dans $]0, +\infty[$ avec $a < b$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$$\|a_n^{(p)}\|_{\infty}^{[a,b]} = \frac{(k-1)!}{(n+a)^p}.$$

Par le même argument qu'au point précédent, ceci est le terme général d'une série convergente. On en déduit que la série de fonctions $\sum a_n^{(p)}$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[a, b]$.

Ceci a été obtenu pour tout segment $[a, b]$ inclus dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Toutes ces vérifications permettent d'affirmer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]0, +\infty[$. C'est vrai pour p quelconque donc cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On en déduit que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction G l'est également car elle s'écrit $G = \exp \circ F$.

Exercice 4. a. La série $\sum f_{n,\alpha}(0)$ converge car c'est la série nulle.

Prenons x dans $]0, +\infty[$. On sait que $e^{-x\sqrt{n}}$ est négligeable devant $1/n^2$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum f_{n,\alpha}(x)$ est convergente.

On a prouvé que la série de fonctions $\sum f_{n,\alpha}$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Le même raisonnement donne la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_{n,0}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ mais la série $\sum f_{n,0}(0)$ diverge grossièrement car son terme général vaut 1.

b. Soit α dans $]0, +\infty[$. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction $f_{n,\alpha}$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad f'_{n,\alpha}(x) = (\alpha - x\sqrt{n})x^{\alpha-1}e^{-x\sqrt{n}}.$$

On en déduit que la fonction $f_{n,\alpha}$ est croissante sur $[0, \frac{\alpha}{\sqrt{n}}]$ (on utilise la continuité en 0 pour cela) et décroissante sur $[\frac{\alpha}{\sqrt{n}}, +\infty[$. Elle atteint donc un maximum en $\alpha/\sqrt{n}$. Cette fonction est positive donc

$$\|f_{n,\alpha}\|_{\infty}^{[0,+\infty[} = f_{n,\alpha}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\alpha^\alpha}{n^{\alpha/2}}e^{-\alpha}.$$

La série de terme général $\|f_{n,\alpha}\|_{\infty}^{[0,+\infty[}$ converge si $\alpha > 2$ et diverge dans le cas contraire. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_{n,\alpha}$ converge normalement si $\alpha > 2$ et seulement dans ce cas.

c. Les fonctions $f_{n,\alpha}$ sont toutes continues sur $[0, +\infty[$. Dans le cas $\alpha > 2$, la série de fonctions $\sum f_{n,\alpha}$ converge normalement sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc elle converge uniformément sur cet intervalle. On en déduit que la fonction F_α est continue sur $[0, +\infty[$ dans ce cas.

Prenons α dans $[0, 2]$. On peut alors prouver que la fonction F_α est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Prenons $a > 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $f_{n,\alpha}$ est bornée sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Remarquons qu'il existe un entier n_a tel que

$$\forall n \geq n_a, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \leq a.$$

Pour tout entier $n \geq n_a$, on en déduit l'égalité

$$\|f_{n,\alpha}\|_{\infty}^{[a,+\infty[} = f_{n,\alpha}(a).$$

Comme on l'a vu à la première question, la série $\sum f_{n,\alpha}(a)$ est convergente. La série de fonctions $\sum f_{n,\alpha}$ converge donc normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Le théorème de continuité donne donc la continuité de la fonction F_α sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

C'est vrai pour tout a strictement positif donc la fonction F_α est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

d. Fixons $x > 0$. Définissons la fonction

$$\varphi_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$$

sur $[0, +\infty[$. C'est une fonction continue et décroissante. Prenons n dans $\mathbb{N}^*$. On peut écrire l'inégalité

$$\forall t \in [n-1, n], \quad \varphi_x(t) \geq \varphi_x(n).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_{n-1}^n \varphi_x(t) dt \geq \int_{n-1}^n \varphi_x(n) dt = \varphi_x(n).$$

De la même manière, on obtient

$$\int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(n).$$

Prenons un entier N strictement positif.

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi_x(n) \leq \sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n \varphi_x(t) dt.$$

La relation de Chasles permet de réécrire cet encadrement

$$\int_1^{N+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq \sum_{n=1}^N f_{n,0}(x) \leq \int_0^N e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

L'heure est venue de calculer ces intégrales. Pour cela, on effectue le changement de variable $t = u^2$. C'est licite car la fonction $u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_0^N e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{\sqrt{N}} e^{-xu} 2u du.$$

Ensuite, on intègre par parties : on dérive $u \mapsto 2u$ en $u \mapsto 2$ et on primitive $u \mapsto e^{-xu}$ en $u \mapsto -\frac{1}{x}e^{-xu}$.

$$\int_0^N e^{-x\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-xu}2u \right]_{u=0}^{u=\sqrt{N}} + \frac{2}{x} \int_0^{\sqrt{N}} e^{-xu} du = -\frac{e^{-x\sqrt{N}}2\sqrt{N}}{x} + 2 \times \frac{e^{-x\sqrt{N}} - 1}{-x^2}.$$

Un calcul analogue donne

$$\int_1^{N+1} e^{-x\sqrt{t}} dt = -2 \frac{e^{-x\sqrt{N+1}}\sqrt{N+1} - e^{-x}}{x} + 2 \times \frac{e^{-x\sqrt{N+1}} - e^{-x}}{-x^2}.$$

Faisons maintenant tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement. Il reste

$$\frac{2}{x^2}e^{-x}(1+x) \leq F_0(x) \leq \frac{2}{x^2}.$$

Multiplions par x^2 .

$$2(1+x)e^{-x} \leq x^2 F_0(x) \leq 2.$$

Le théorème des gendarmes prouve que $x^2 F_0(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 0. En d'autres termes, on voit que $F_0(x)$ est équivalent à $2/x^2$ quand x tend vers 0.

En particulier, la quantité $F_2(x)$ admet la limite 2 quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction F_2 n'est donc pas continue en 0. De même, pour tout α dans $]0, 2[$, la quantité $F_\alpha(x)$ admet la limite $+\infty$ quand x tend vers 0, si bien que la fonction F_α n'est pas continue en 0.

Exercice 5. Commençons par remarquer que pour un vecteur x quelconque de E , l'égalité $f(x) = 0_E$ implique l'égalité $f^2(x) = 0_E$, si bien que l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ est valide sans hypothèse supplémentaire.

Faisons l'hypothèse qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq C \times \|f^2(x)\|.$$

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. L'égalité $f^2(x) = 0_E$ donne

$$\|f(x)\| \leq C \times 0 = 0$$

donc $\|f(x)\| = 0$ puis $f(x) = 0_E$, si bien que x appartient à $\text{Ker}(f)$. On en déduit l'inclusion $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Par double inclusion, on obtient l'égalité $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Réciproquement, prenons pour hypothèse l'égalité $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Comme on l'a vu dans l'exercice 1, l'endomorphisme f admet un pseudo-inverse g . Les égalités $f \circ g = g \circ f$ et $f \circ g \circ f = f$ donnent $f = g \circ f^2$.

L'endomorphisme g est lipschitzien (application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie) donc il existe $C > 0$ tel que

$$\forall y \in E, \quad \|g(y)\| \leq C \times \|y\|.$$

Pour tout x dans E , on obtient donc

$$\|f(x)\| = \|g(f^2(x))\| \leq C \times \|f^2(x)\|.$$

Exercice 6. a. On connaît l'inclusion $B \subset \text{Adh}(B)$ donc $A \cap B \subset A \cap \text{Adh}(B)$ puis $A \cap B \subset \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$.

L'ensemble $\text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$ est un fermé qui contient $A \cap B$ donc il contient son adhérence. On a alors prouvé l'inclusion $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$.

Remarquons au passage que cette inclusion est valable en toute généralité : on n'a pas utilisé l'hypothèse que A est ouvert.

Réciproquement, soit $x \in A \cap \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$. Il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B qui converge vers x . De plus, le fait que A soit ouvert donne l'existence de $r > 0$ tel que $B(x, r)$ soit inclus dans A .

D'après la définition de la convergence, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \|x - b_n\| < r.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq n_0$, le vecteur b_n est un élément de $A \cap B$. On en déduit que le vecteur x est dans l'adhérence de $A \cap B$. On a alors prouvé l'inclusion $A \cap \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cap B)$.

L'ensemble $\text{Adh}(A \cap B)$ est un fermé qui contient $A \cap \text{Adh}(B)$ donc il contient son adhérence. On a alors prouvé l'inclusion $\text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B)) \subset \text{Adh}(A \cap B)$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$.

b. Prenons $E = \mathbb{R}$. Prenons les parties $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On trouve alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\text{Adh}(A \cap B) = \emptyset$.

On trouve également $\text{Adh}(B) = \mathbb{R}$ donc $A \cap \text{Adh}(B) = \mathbb{Q}$ puis $\text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B)) = \mathbb{R}$.

L'égalité $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A \cap \text{Adh}(B))$ est donc fausse dans ce cas.
