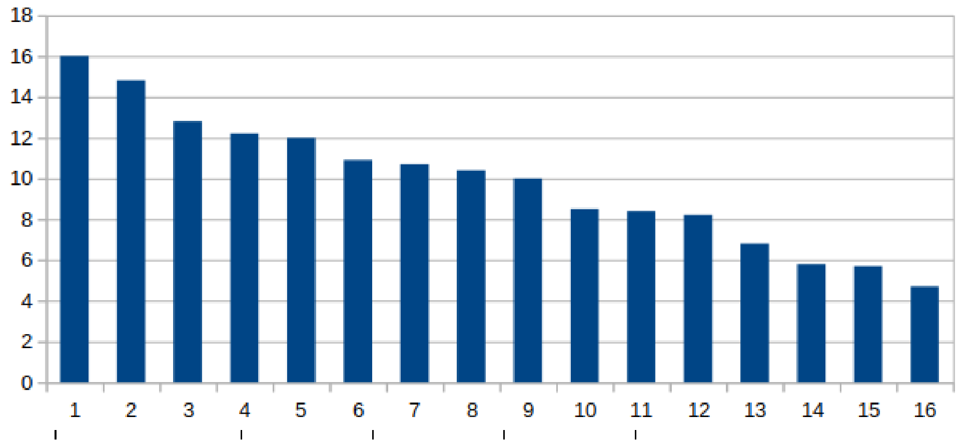
Compte rendu du devoir surveillé n° 3 — piste bleue

Thèmes abordés. Algèbre linéaire. Séries de fonctions.

La médiane se situe à 10,2, avec une moyenne à 9,8 et un écart-type de 3,26.



Problème I

Ce problème est issu d'un vieux sujet d'écrit. Après avoir constaté l'impossibilité qu'une norme préserve la commutation, on trouve quelles semi-normes la préserve.

Le maximum de points réalisable sur ces deux questions est de 46. La moyenne de la classe sur cette partie est de 21,4. Le meilleur total obtenu est de 42 points.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5.a	Q5.b	Q5.c	Q5.d	Q5.e
Barème	1,5	1,5	1	0,5	1	1	1,5	1,5	2
Réussite	58,6 %	75,8 %	15,6 %	78,1 %	65,6 %	39,1 %	28,1 %	15,6 %	54,7 %

Question 1. Question traitée deux fois en classe mais pas toujours réussie. Ce qui me gêne surtout, c'est que dans certaines copies, je trouve des égalités entre objets de types différents.

Questions 3 et 5.b. Ces deux questions s'appuyaient sur le résultat de la première question. C'était un peu caché à la question 3 mais plus visible en 5.b. Il est décevant que les réussites à la question 5.b n'aient pas rétrospectivement impacté la question 3.

Problème II

Ce problème est inspiré de CCP PSI 2019. Il est très calculatoire. Son utilisation du programme de deuxième année se résume à l'application du théorème de dérivation terme à terme.

Le maximum de points réalisable sur le problème II est de 104. La moyenne de la classe sur ce problème est de 27,14. Le meilleur total obtenu est de 47,75.

Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16	Q17	Q18
1	1	1	2	1,5	2	2	1,5	2,5	1,5	1,5	2	1,5
40,6 %	82,8 %	58,6 %	25,0 %	50,8 %	18,8 %	56,2 %	59,4 %	20,3 %	4,7 %	14,1 %	18,0 %	10,9 %

Réussite mitigée à la question 6 : beaucoup d'entre vous ont fixé x une fois pour toutes avant d'attaquer la récurrence ; ce faisant, vous avez *dérivé une égalité en un point*, ce qui est incorrect.

Les constantes de la question 7 ont généralement été bien calculées, mais une erreur de logique classique a parfois été commise — conclure à l'unicité du couple (a, b) alors que c'est une question d'existence qui est posée.

À la question 9, la méthode de mon corrigé est inutilement compliquée : il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire

$$\left|(x+\mathrm{i})^{p+1}-(x-\mathrm{i})^{p+1}\right| \leqslant |x+\mathrm{i}|^{p+1}+|x-\mathrm{i}|^{p+1}=2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}.$$

L'inégalité de la question 10 aurait pu en fait être obtenue directement par inégalité triangulaire à partir de la formule de la question 8 sans mettre au même dénominateur.

Étonnamment peu de réussite à la question 11. Presque personne n'a repéré l'identité $\varphi_a(x)=\varphi_1(ax)$.

Presque tout le monde a bien compris que la question 12 se traitait avec la formule de Leibniz. Il faut absolument la donner d'abord sous forme littérale pour que les calculs soient compréhensible.

Je le dis de nouveau : toute expression de la forme $(g(x))^{(k)}$ est une monstruosité. La dérivation s'applique à une fonction, pas à un nombre. Cette grossière erreur de notation devrait avoir disparu depuis le début de la première année.

À la question 13, le bon argument pour obtenir $0^{n-k}=0$ n'est pas $n-k\neq 0$ mais $n-k>0$.

Gros fiasco à la question 15 : presque personne n'a pensé à utiliser le résultat de la question précédente !

À l'inverse, ce lien a été repéré à la question 16 mais il y a eu beaucoup d'erreurs de notation et de méthode. J'en profite pour signaler que pour prouver la convergence de la série de terme général $s^{n-p-1}2^n/\sqrt{n!}$, la règle de d'Alembert marche bien.

Beaucoup de flou à la question 17. Le théorème de dérivation est généralement connu mais appliqué de manière trop approximative (les sommes sont censées commencer au même indice).

Problème III

Ce problème est inspiré d'une production ancienne de mon prédécesseur. Son énoncé se limitait à la question 28. C'est le plus classique des trois problèmes mais le fait que la méthode des rectangles s'applique dans le cas d'une fonction qui n'est pas monotone rend les raisonnements un peu plus compliqués que d'habitude.

Le maximum de points réalisable sur le problème III est de 60. La moyenne de la classe sur ce problème est de 8,72. Le meilleur score réalisé sur ce problème est de 20.

	Q21	Q22	Q23	Q24	Q25	Q26	Q27	Q28
Barème	1	1	2	1	2	2	3	3
Réussite	45,3 %	55,5 %	29,7 %	48,4 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	3,1 %

Beaucoup d'erreurs de vocabulaire aux questions 21 et 22. La notation $||f_n(x)||_\infty$ n'a pas de sens : la norme infinie s'applique à la fonction, pas au nombre.

Beaucoup d'erreurs de méthode également, alors que ces deux questions étaient très standard : comparaison à une série de Riemann ou règle de d'Alembert pour la question 21 ; variations de $|f_n|$ pour la question 22.

À la question 22, plusieurs d'entre vous étudient la norme infinie sur un autre intervalle que $]0,+\infty[$. C'est purement hors sujet.

La convergence normale n'ayant pas lieu sur $]0,+\infty[$, c'est donc sur des intervalles plus petits qu'on l'établit, pour appliquer le théorème de continuité sur ces intervalles plus petits. Cette méthode est fréquemment employée dans les exemples des chapitres 6 et 7 et il faut absolument s'en imprégner.

La faible réussite à la question 23 montre une méconnaissance de cette technique importante.

L'étude de variations de la question 24 a été bien repérée pour du grappillage mais ces variations n'ont pas été bien exploitées pour effectuer la méthode des rectangles. Manque de temps ou méconnaissance de la méthode ? Il y avait des points à prendre ici.

J'ai vu quelques tentatives à la question 28 pour passer de l'encadrement à la limite de $x\mathrm{F}(x)$ quand x tend vers 0. L'ennui, c'est que personne n'a pris le temps de calculer la limite de $n_x^2\,x$ ni de $(n_x+1)^2\,x$, sans quoi les affirmations ne reposent sur rien.
