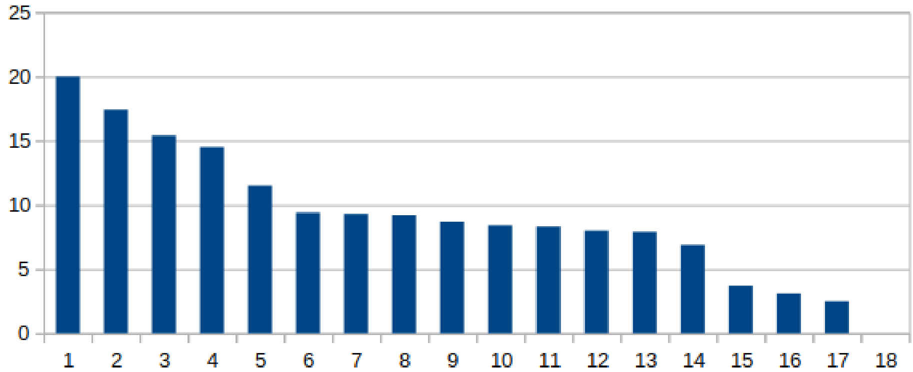
Compte rendu du devoir surveillé n° 3 — piste rouge

Thèmes abordés. Algèbre linéaire. Séries de fonctions. Probabilités déguisées.

La médiane se situe à 8,7, avec une moyenne à 9,66 et un écart-type de 4,84.



Problème I

Ce premier problème est un grand classique de l'algèbre linéaire (hors diagonalisation). On y prouve que les endomorphismes de trace nulle sont exactement les commutateurs.

En dehors des questions 3 et 6, un peu plus abstraites que le reste, ce problème me semble d'une difficulté modérée.

Le maximum de points réalisable sur ces deux questions est de 46. La moyenne de la classe sur cette partie est de 13,5. Le meilleur total obtenu est de 33,5 points.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Barème	1	0,5	2	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5	2
Réussite	39,8 %	64,8 %	26,6 %	91,4 %	56,2 %	6,2 %	6,2 %	6,2 %	35,9 %	29,7 %

À la question 1, plusieurs d'entre vous m'ont proposé l'ensemble vide comme espace vectoriel, ce qui est parfaitement choquant. J'ai lu beaucoup d'affirmations fausses ou mal quantifiées dans la démonstration de P_1. Beaucoup d'égalités entre objets de natures différentes, notamment.

La question 2, très facile, est souvent bien réussie mais personne n'ose affirmer directement que $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$ alors que c'est une propriété du cours !

La question 3 est plus délicate. Peu d'entre vous tiennent compte de l'indication, ce qui est bien dommage.

Dans les questions ultérieures, plusieurs copies font référence à la base $\mathcal{E}$ de la question 3. C'est une erreur de logique, en ce sens que l'espace vectoriel de la question 3 a été remplacé par celui du préambule de la question 4. Aucun des anciens vecteurs n'est encore en circulation.

Une moitié d'entre vous ont compris que la question 5 était juste la contraposée de la question 3 mais un seul a pensé, à la question 6, à compléter la famille libre $(e_1, f(e_1))$ en une base de E. C'est surprenant, dans la mesure où la plupart des copies proposent de compléter la famille (e_1).

Une erreur fréquente est de prétendre que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille base de E et $f(e_1)$ n'est pas colinéaire à e_1, alors la composante de $f(e_1)$ selon e_1 est nulle. À moins d'avoir choisi spécifiquement e_2 pour réaliser ce fait, la composante en question peut avoir n'importe quelle valeur.

La question 7 est une application immédiate de l'hypothèse P_{n-1} mais la plupart des explications fournies sont embrouillées et truffées d'erreurs sur la nature des objets employés.

À la question 8, un seul d'entre vous sait expliquer pourquoi au moins un nombre complexe n'est pas une valeur propre de U. C'est peu.

Le calcul de la question 9 est plutôt réussi mais la deuxième partie de la question l'est moins. Le lien avec l'inversibilité de $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}$ n'est pas toujours vu et certains proposent une condition nécessaire sur R et S alors que l'énoncé demande une condition suffisante.

Problème II

Le deuxième problème est inspiré de Mines-Ponts PSI 2019, maths 2. C'est un problème mal conçu et mal rédigé, que j'ai partiellement réécrit pour améliorer quelques notations et empêcher certaines questions d'être impossibles à résoudre — j'ai échoué sur ce dernier point.

Le maximum de points réalisable sur le problème II est de 90. La moyenne de la classe sur ce problème est de 27,24. Le meilleur total obtenu est de 50.

Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16.a	Q16.b	Q17	Q18	Q19	Q20	Q21	Q22
0,5	1,5	2	1	2	2,5	2	3	2	1	2	1	2
100,0 %	61,0 %	50,7 %	90,4 %	2,2 %	25,7 %	52,9 %	2,9 %	41,2 %	29,4 %	5,9 %	22,8 %	8,8 %

Comme expliqué dans le corrigé, les cinq questions calculatoires du début montre de la part des auteurs du sujet une grande méconnaissance du programme de nos filières, puisque tout se résume à la variance d'une loi binomiale et à l'inégalité classique $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.

Au demeurant, les quatre premières questions sont celles qui vous ont rapporté le plus de points dans ce problème, mais j'imagine qu'elles ont consommé un temps précieux qui aurait pu être mieux employé ailleurs.

En l'absence du point de vue probabiliste, la question 15 requérait une utilisation astucieuse de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Je vous invite à bien étudier cette méthode. Elle pourrait resservir à l'occasion.

La première partie de la question 16 est juste une utilisation de l'inégalité triangulaire. La deuxième partie, plus astucieuse, a étonnamment été bien mieux réussie.

Un seul d'entre vous a su en déduire convenablement la convergence uniforme de la dernière question. L'erreur standard consiste à passer à la limite alors que l'existence de la limite n'est pas connue. On ne peut pas contourner le recours à la définition epsilonnesque de la limite. Même topo à la question 20.

La question 18 a déjà été rencontrée dans le devoir surveillé précédent. L'intégration par parties a été bien menée mais pas la majoration. Je trouve encore trop souvent des inégalités entre nombres non réels ou des versions incorrectes de l'inégalité triangulaire.

À la question 21, le caractère lipschitzien est souvent mal interprété. L'application φ_f est définie de E vers $\mathbb{R}$. La norme $|| \, ||_\infty$ est donc placée sur l'espace de départ, pas sur celui d'arrivée — l'énoncé ne précise pas quelle norme on prend sur $\mathbb{R}$ puisque c'est toujours la valeur absolue.

Problème III

Le maximum de points réalisable sur le problème III est de 26. La moyenne de la classe sur ce problème est de 7,97. Le meilleur score réalisé sur ce problème est de 25,25.

	Q23	Q24	Q25
Barème	1,5	2	3
Réussite	45,6 %	41,2 %	16,2 %

Le caractère polynomial de la question 23 est souvent expliqué, même si c'est généralement maladroit.

Les égalités de la question 24 sont souvent données sans justification. Il suffisait vraiment d'invoquer la séparation des parties réelles et des parties imaginaires. Je rappelle que l'incantation « par identification » n'est jamais une justification suffisante si on ne précise pas ce qui est identifié.

La conclusion nécessitait de bien comprendre à quoi menait le travail effectué. Affirmer que P_1 ou P_2 est inversible est incorrect. Il ne suffit pas de dire que « puisque f n'est pas la fonction nulle, il y a au moins un élément de $\mathbb{R}$ où ne s'annule pas » ; je connais plein de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ différentes de la fonction nulle et dont la restriction à $\mathbb{R}$ est nulle (la plus simple est la partie imaginaire).