PC* — mathématiques **samedi 7 décembre 2019**
Corrigé du devoir en temps libre n° 5

Corrigé du devoir en temps libre n° 5

Exercice 1. a. On remarque que les matrices A et M commutent

$$\mathrm{A} \times \mathrm{M} = (\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}) \times \mathrm{M} = \mathrm{M}^3 + \mathrm{M}^2 = \mathrm{M} \times (\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}) = \mathrm{M} \times \mathrm{A}.$$

Soit λ une valeur propre de A (s'il en existe). Soit U un élément de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$. On trouve alors

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{MU}) = (\mathrm{AM}) \times \mathrm{U} = (\mathrm{MA}) \times \mathrm{U} = \mathrm{M} \times (\mathrm{AU}) = \mathrm{M} \times (\lambda \mathrm{U}) = \lambda(\mathrm{MU}),$$

si bien que MU est aussi un élément de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$.

On a prouvé que l'espace propre $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ est stable par M. Cela est vrai pour toute valeur propre λ de A.

---

b. Soit $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n)$ une base de diagonalisation pour A. Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, notons λ_k la valeur propre de A associée au vecteur propre U_k. Les espaces propres de A sont de dimension 1 donc il y a exactement n valeurs propres. Les λ_k sont donc deux à deux distincts.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{A})$ est stable par M. Or cet espace propre est la droite dirigée par U_k donc le vecteur MU_k est proportionnel à U_k. Notons μ_k le nombre défini par la relation $\mathrm{MU}_k = \mu_k \mathrm{U}_k$. Le vecteur U_k est non nul donc c'est aussi un vecteur propre de M.

Finalement, la famille $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres à la fois pour A et pour M.

Notons U la matrice de colonnes $\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n$. Cette matrice est alors inversible et on obtient

$$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{AU} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}^{-1}\mathrm{MU} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n. \end{pmatrix}$$

On rappelle la relation $(\mathrm{U}^{-1}\mathrm{MU})^2 = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{M}^2\mathrm{U}$, qui donne

$$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{M}^2\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{U}^{-1}(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M})\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mu_1^2 + \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^2 + \mu_n \end{pmatrix}.$$

L'égalité $\mathrm{U}^{-1}(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{AU}$ donne

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mu_k^2 + \mu_k = \lambda_k.$$

---

c. Commençons par trouver les éléments propres de la matrice A. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - 8\mathrm{X} + 12 = (\mathrm{X} - 2)(\mathrm{X} - 6).$$

Il est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable et ses deux espaces propres sont de dimension 1. Les valeurs propres de A sont 2 et 6. Les égalités

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -32 & -24 \\ 48 & 36 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} - 6\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -36 & -24 \\ 48 & 32 \end{pmatrix}$$

permettent de remarquer que les vecteurs colonnes

$$\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 2 et 6 respectivement. Ces deux vecteurs forment donc une base de diagonalisation pour la matrice A. En posant

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

on a créé une matrice inversible réalisant l'égalité

$$\mathrm{U}^{-1} \times \mathrm{A} \times \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par analyse-synthèse. Prenons une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et faisons l'hypothèse $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

D'après le raisonnement de la question b, il existe deux nombres μ_1 et μ_2 vérifiant les relations

$$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{MU} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1^2 + \mu_1 = 2, \qquad \mu_2^2 + \mu_2 = 6.$$

On voit que μ_1 doit valoir 1 ou -2 et que μ_2 doit valoir 2 ou -3. Il y a donc au plus 4 solutions, à savoir les matrices de la forme

$$\mathrm{U} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \times \mathrm{U}^{-1},$$

où le couple (μ_1, μ_2) est pris dans l'ensemble $\{(1;2), (1;-3), (-2;2), (-2;-3)\}$.

Passons à la synthèse. Prenons un couple (μ_1, μ_2) dans l'ensemble $\{(1;2), (1;-3), (-2;2), (-2;-3)\}$ et posons

$$\mathrm{M} = \mathrm{U} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \times \mathrm{U}^{-1}.$$

On trouve alors

$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{U} \times \begin{pmatrix} \mu_1^2 + \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 + \mu_2 \end{pmatrix} \times \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{A}.$$

Les quatre candidats évoqués ci-dessus sont donc effectivement des solutions de l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$. Voici, après calcul, les quatre solutions en question

$$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 33 & 24 \\ -48 & -35 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -34 & -24 \\ 48 & 34 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -12 & -11 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Considérons une base de diagonalisation $\mathcal{B}$ pour f et notons A la matrice de f relativement à cette base. Cette matrice est alors diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux. On obtient alors

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Cette écriture montre que le rang de A est égal au nombre d'indices i pour lesquels λ_i est non nul. De même, le rang de A^2 est égal au nombre d'indices i pour lesquels λ_i^2 est non nul.
Ces deux matrices ont donc le même rang. On en déduit que f et f^2 ont le même rang.

La réciproque est fausse. Pour cela, considérons une matrice A inversible et non diagonalisable (par exemple, une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ différente de I_n dont tous les coefficients diagonaux valent 1). Celle-ci vérifie néanmoins l'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^2)$ car ces deux rangs valent n.

Exercice 3. a. Prenons U dans $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$. On trouve

$$\mathrm{A}(\mathrm{BU}) = \mathrm{B}^3\mathrm{U} = \mathrm{B}(\mathrm{AU}) = \mathrm{B}(\lambda\mathrm{U}) = \lambda\mathrm{BU}.$$

Le vecteur BU est donc dans $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$. On a prouvé que cet espace propre est stable par B.

Notons φ_λ l'endomorphisme de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ défini par $\mathrm{U} \mapsto \mathrm{BU}$. Pour tout U dans cet espace propre, on obtient

$$\varphi_\lambda^2(\mathrm{U}) = \mathrm{B}^2\mathrm{U} = \mathrm{AU} = \lambda\mathrm{U}$$

donc l'endomorphisme φ_λ^2 de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ est l'homothétie $\lambda\mathrm{Id}$. En prenant le déterminant, on obtient

$$(\mathrm{dét}(\varphi_\lambda))^2 = \lambda^{\dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}))}$$

donc $\lambda^{\dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}))} \geqslant 0$. Le nombre λ étant strictement négatif, on en déduit que $\dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}))$ est un entier pair.

---

b. La matrice carrée $-\mathrm{I}_2$ représente canoniquement une rotation d'angle π. C'est donc le carré de la matrice R suivante, qui représente canoniquement une rotation d'angle $\pi/2$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisons les valeurs propres de la matrice A. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres positives. Notons $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ses valeurs propres strictement négatives. Notons $\ell_1, \ldots, \ell_r, m_1, \ldots, m_s$ les dimensions respectives des espaces propres correspondants.

La matrice A est diagonalisable donc il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathrm{I}_{\ell_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r\mathrm{I}_{\ell_r} & & & \\ & & & \mu_1\mathrm{I}_{m_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_s\mathrm{I}_{m_s} \end{pmatrix}.$$

Pour tout k dans $[\![1, s]\!]$, notons R_k la matrice diagonale par blocs de taille m_k dont les blocs diagonaux sont $m_k/2$ exemplaires de la matrice $\sqrt{-\mu_k}\,\mathrm{R}$; on obtient alors $\mathrm{R}_k^2 = \mu_k\mathrm{I}_{m_k}$.

Définissons enfin la matrice

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\mathrm{I}_{\ell_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sqrt{\lambda_r}\mathrm{I}_{\ell_r} & & & \\ & & & \mathrm{R}_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mathrm{R}_s \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}.$$

La matrice B est alors une racine carrée de A (je laisse les lecteurs et lectrices le vérifier par le calcul).

Exercice 4. a. Considérons une base $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ de F et un vecteur U_3 qui engendre la droite $\mathrm{F}^\perp$. Remarquons que les vecteurs de F sont exactement les vecteurs orthogonaux à U_3. Rappelons aussi que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est la fonction

$$(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \mapsto \mathrm{U}^\mathrm{T} \times \mathrm{V}.$$

On commence par supposer que F est stable par A. Le but est de prouver que U_3 est un vecteur propre de A^T, c'est-à-dire de prouver que $\mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3$ est dans $\mathrm{Vect}(\mathrm{U}_3)$, c'est-à-dire dans $\mathrm{F}^\perp$.

Prenons un indice i valant 1 ou 2. Le produit scalaire de U_i avec $\mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3$ est donné par

$$(\mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3)^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_i = \mathrm{U}_3^\mathrm{T} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U}_i.$$

On sait que le vecteur $\mathrm{A} \cdot \mathrm{U}_i$ est dans F donc il est orthogonal à U_3. Il reste donc

$$(\mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3)^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_i = 0.$$

On a prouvé que $\mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3$ est orthogonal à U_1 et U_2. Il est donc dans $\mathrm{F}^\perp$. Il est donc proportionnel à U_3. Le vecteur U_3 est non nul. On peut donc conclure que c'est un vecteur propre de la matrice A^T.

Réciproquement, on suppose que le vecteur U_3 est un vecteur propre de la matrice A^T. Notons λ la valeur propre associée. Prenons un vecteur U de F. Le produit scalaire de $\mathrm{A} \cdot \mathrm{U}$ avec U_3 s'écrit

$$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{U})^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3 = \mathrm{U}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{A}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3 = \lambda \underbrace{\mathrm{U}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_3}_{=0} = 0.$$

Le vecteur $\mathrm{A} \cdot \mathrm{U}$ est donc orthogonal à U_3. Il appartient donc à l'orthogonal de la droite $\mathrm{F}^\perp$, c'est-à-dire au plan F. On a prouvé que le plan F est stable par A.

Par double implication, on a prouvé que F est stable par A si, et seulement si, la droite $\mathrm{F}^\perp$ est dirigée par un vecteur propre de $\mathrm{A}^\perp$.

Remarque. Plus généralement, pour n'importe quelle matrice A carrée et réelle, la stabilité par A d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ équivaut à la stabilité de $\mathrm{F}^\perp$ par la matrice A^T.

---

b. La matrice A^T admet pour polynôme caractéristique $(\mathrm{X}-1)^3+1$. Son unique valeur propre réelle est 0. On trouve que le noyau de A^T est la droite dirigée par le vecteur

$$\mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'unique plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ stable par A est le plan

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{U}_3)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;;\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 5. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, considérons la matrice

$$\mathrm{A}_p = \begin{pmatrix} 2^{-p} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2^{-p} \times n \end{pmatrix}.$$

Pour être plus précis, les coefficients diagonaux sont les nombres $2^{-p} \times j$, où l'indice j varie de 1 à n.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, la matrice A_p est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (la matrice A_p est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous distincts).

Cependant, la suite matricielle $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet 0 pour unique valeur propre et elle est de rang $n-1$, si bien que l'espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{A})$ est de dimension 1 (par la formule du rang). La somme des dimensions des espaces propres de la matrice A est strictement inférieure à n donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

On dira plus tard que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

Exercice 6. a. On suppose que la matrice A est inversible. On obtient

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A}(\mathrm{BA})\mathrm{A}^{-1}.$$

Les matrices AB et BA sont semblables donc elles ont le même polynôme caractéristique.

---

b. Soit z dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. La matrice $\mathrm{A} - z\mathrm{I}_n$ est alors inversible donc, d'après le résultat de la question précédente, les matrices $(\mathrm{A}-z\mathrm{I}_n)\mathrm{B}$ et $\mathrm{B}(\mathrm{A}-z\mathrm{I}_n)$ ont le même polynôme caractéristique. On en déduit que $f(z)$ est nul.

---

c. Soit z dans $\mathbb{C}$. On peut réécrire $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \text{dét}((\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{AB}) + z\mathrm{B}) - \text{dét}((\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{BA}) + z\mathrm{B}),$$

qui permet de voir que f est une fonction polynomiale. Le spectre de A possède au plus n éléments donc on a vu à la question précédente que le polynôme f possède une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. En particulier, l'égalité $f(0) = 0$ donne

$$\text{dét}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{AB}) = \text{dét}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{BA}).$$

C'est vrai pour tout λ dans $\mathbb{C}$ donc les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 7. 1. Remarquons d'abord que N_∞ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})$ est nul. On en déduit que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ est nul pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, puis que $a_{i,j}$ est nul pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, donc que A est nulle.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons un indice i_0 vérifiant l'égalité

$$\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

Prenons i dans $[\![1, n]\!]$. On obtient

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant |\lambda| \times \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = |\lambda| \times \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i_0,j}|\,.$$

On en déduit que cette quantité est maximale pour $i = i_0$, donc

$$\mathrm{N}_\infty(\lambda \mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i_0,j}| = |\lambda| \times \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}).$$

Enfin, prenons A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout indice i dans $[\![1, n]\!]$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ donne

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) + \mathrm{N}_\infty(\mathrm{B}).$$

La majoration $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) + \mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})$ a lieu pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, donc $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) + \mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})$.

On a bien montré que N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.a. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice colonne $\mathrm{A}x$ s'écrit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ donne alors

$$|y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leqslant ||x||_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant ||x||_\infty \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}).$$

Cette majoration étant valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on obtient la majoration $||\mathrm{A}x||_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})||x||_\infty$.

2.b. Pour tout x non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, le quotient $\dfrac{||\mathrm{A}x||_\infty}{||x||_\infty}$ est bien défini et il est majoré par $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})$. Pour montrer l'égalité demandée, il suffit de trouver un vecteur x non nul vérifiant l'égalité $||\mathrm{A}x||_\infty = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})||x||_\infty$.

Prenons pour commencer un indice i dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant l'égalité $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, on peut choisir [1] un nombre x_j de module 1 tel que l'égalité $|a_{i,j}| = a_{i,j}x_j$ ait lieu. On observe alors l'égalité $||x||_\infty = 1$ et, avec les notations de la question précédente, $y_i = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})$ donc $||\mathrm{A}x||_\infty \geqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})||x||_\infty$ puis $||\mathrm{A}x||_\infty = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})||x||_\infty$ par double inégalité.

L'égalité $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = \max\limits_{\substack{x\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\\ x\neq 0}} \dfrac{||\mathrm{A}x||_\infty}{||x||_\infty}$ est démontrée.

2.c. Soit λ une valeur propre de A de module maximal (donc $\rho(\mathrm{A}) = |\lambda|$). Considérons un vecteur propre x associé à cette valeur propre. On a alors l'inégalité suivante

$$\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) \geqslant \frac{||\mathrm{A}x||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{||\lambda x||_\infty}{||x||_\infty} = |\lambda| = \rho(\mathrm{A}).$$

Remarque. Une étape de ce calcul mérite notre attention : la formule $||\lambda x||_\infty = |\lambda|\cdot||x||_\infty$ n'est pas une conséquence du caractère positivement homogène de la norme $||\ ||_\infty$ puisque ce caractère ne concerne que les scalaires *réels*. Cette formule reste valable pour les scalaires complexes mais si on veut l'utiliser, on doit au minimum le signaler, voire le démontrer — mais rapidement, dans ce cas.

---

3. Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $\mathrm{C} = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. Les coefficients de la matrice C sont donnés par l'identité $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$. Prenons i dans $[\![1,n]\!]$ et appliquons de nouveau l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\sum_{j=1}^{n}|b_{k,j}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}).$$

Cette majoration étant valable pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on obtient l'inégalité $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})$.

Autre démonstration. Soit x un vecteur non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. L'inégalité obtenue en **I.2.a** donne

$$||\mathrm{AB}x||_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})||\mathrm{B}x||_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})||x||_\infty.$$

En choisissant x de manière à avoir $\dfrac{||\mathrm{AB}x||_\infty}{||x||_\infty} = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{AB})$, il reste $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{B})$.

4.a. La première chose est de prouver que $\mathrm{N_Q}$ est une norme. C'est vite vu (et j'ai la flemme de le détailler) mais on a surtout vite fait d'oublier de le démontrer.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'égalité $\mathrm{Q^{-1}ABQ} = (\mathrm{Q^{-1}AQ})(\mathrm{Q^{-1}BQ})$ et l'inégalité de la question précédente donnent $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}ABQ}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}AQ})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}BQ})$ c'est-à-dire $\mathrm{N_Q(AB)} \leqslant \mathrm{N_Q(A)N_Q(B)}$, ce qui prouve que $\mathrm{N_Q}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4.b. Il suffit de signaler le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et que toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont donc équivalentes.

Sauf que la notion de normes équivalentes n'est pas au programme. On va donc le prouver par un calcul direct, en exploitant le fait que N_∞ est une norme matricielle.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On trouve directement

$$\mathrm{N_Q(A)} = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}AQ}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q})$$

et

$$\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q(Q^{-1}AQ)Q^{-1}}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}AQ})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}}) = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q})\mathrm{N_Q(A)}\mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}}).$$

On voit qu'on peut choisir $\mathrm{C_Q} = \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q}) \times \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q^{-1}})$.

---

1. Si $a_{i,j}$ est non nul, on prend $x_j = \overline{a_{i,j}}/|a_{i,j}|$; sinon, on prend $x_j = 1$.

5.a. Notons $\mathrm{T} = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Le coefficient $t_{i,j}$ est nul pour tout couple (i,j) d'indices vérifiant $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Prenons s dans $]0,+\infty[$. Un calcul montre que $(\mathrm{D}_s)^{-1}\mathrm{T}\mathrm{D}_s$ est la matrice $(s^{j-i}t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On en déduit l'expression suivante pour $\mathrm{N}_{\mathrm{D}_s}(\mathrm{T})$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{D}_s}(\mathrm{T}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=i}^{n} s^{j-i}|t_{i,j}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(|t_{i,i}| + \sum_{k=1}^{n-i} s^k |t_{i,i+k}| \right).$$

Remarquons maintenant que les coefficients $t_{1,1},\dots,t_{n,n}$ sont les valeurs propres de T, si bien que pour chaque i dans $[\![1,n]\!]$, on obtient la majoration

$$|t_{i,i}| + \sum_{k=1}^{n-i} s^k|t_{i,i+k}| \leqslant \rho(\mathrm{T}) + \sum_{k=1}^{n-i} s^k |t_{i,i+k}|.$$

L'expression polynomiale $\sum\limits_{k=1}^{n-i} s^k|t_{i,i+k}|$ tend vers 0 quand s tend vers 0, si bien qu'il existe $s_i > 0$ tel que pour tout élément s de $]0,s_i]$, ce terme soit majoré par ε.

Ainsi, en prenant $s = \min(s_1,\dots,s_n)$, on obtient l'inégalité $|t_{i,i}| + \sum\limits_{k=1}^{n-i} s^k|t_{i,i+k}| \leqslant \rho(\mathrm{T}) + \varepsilon$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire $\mathrm{N}_{\mathrm{D}_s}(\mathrm{T}) \leqslant \rho(\mathrm{T}) + \varepsilon$.

5.b. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathrm{T} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$ soit triangulaire supérieure. De plus, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de T. On a vu à la question précédente qu'il est possible de choisir $s > 0$ de manière à avoir l'inégalité $\mathrm{N}_{\mathrm{D}_s}(\mathrm{T}) \leqslant \rho(\mathrm{T}) + \varepsilon$.

Remarquons maintenant les égalités $\rho(\mathrm{T}) = \rho(\mathrm{A})$ (les matrices A et T ont les mêmes valeurs propres) et $\mathrm{N}_{\mathrm{D}_s}(\mathrm{T}) = \mathrm{N}_{\mathrm{QD}_s}(\mathrm{A})$. En renommant N_ε la norme matricielle $\mathrm{N}_{\mathrm{QD}_s}$, on obtient donc

$$\mathrm{N}_\varepsilon(\mathrm{A}) \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

---

6. Supposons que la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Comme à la question précédente, considérons une matrice Q inversible telle que la matrice $\mathrm{T} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$ soit triangulaire supérieure.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on connaît l'égalité $\mathrm{T}^k = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{Q}$ donc $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{T}^k) = \mathrm{N}_\mathrm{Q}(\mathrm{A}^k)$. On en déduit que $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{T}^k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

La suite de matrices $(\mathrm{T}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers la matrice nulle.

Or les coefficients diagonaux de T^k valent $(t_{1,1})^k,\dots,(t_{n,n})^k$. Ceux-ci tendent vers 0 quand k tend vers $+\infty$, ce qui impose la majoration $|t_{i,i}| < 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Comme $\rho(\mathrm{A})$ est le maximum de ces nombres $|t_{i,i}|$, on obtient l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) < 1$.

Supposons maintenant réciproquement que $\rho(\mathrm{A})$ est strictement inférieur à 1. Comme précédemment, on introduit une matrice Q inversible et une matrice T triangulaire supérieure vérifiant $\mathrm{T} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$. Notons l'égalité $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{T})$, due au fait que A et T ont le même spectre.

Prenons $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) + \varepsilon < 1$. D'après **5.b**, on peut considérer une norme matricielle N_ε vérifiant la majoration $\mathrm{N}_\varepsilon(\mathrm{A}) < 1$.

Une démonstration par récurrence donne $0 \leqslant \mathrm{N}_\varepsilon(\mathrm{A}^k) \leqslant (\mathrm{N}_\varepsilon(\mathrm{A}))^k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$, ce qui prouve que $\mathrm{N}_\varepsilon(\mathrm{A}^k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. On a alors montré que la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Par double implication, on a justifié que la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si, et seulement si, son rayon spectral est strictement majoré par 1.
