

Exercice 1. (*) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad ; \quad a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad a_n = e^{i \ln(\ln(n))} \quad ; \quad a_n = \exp(n^\alpha) \quad ; \quad a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2} \quad ; \quad a_n = n^{(-1)^n}.$$

Exercice 2. (*) Prouver l'égalité $\text{rayon}(\sum u_n z^n) = \min(\text{rayon}(\sum u_{2p} z^{2p}), \text{rayon}(\sum u_{2p+1} z^{2p+1}))$.

Exercice 3. (*) On fixe a et b dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on pose

$$c_{2p} = a^p \quad \text{et} \quad c_{2p+1} = b^p.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ puis exprimer sa somme.

Exercice 4. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[[1, n]]$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sqrt{\pi(n)} z^n$.

Exercice 5. ()** On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Encadrer H_n entre deux puissances de n et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$.

b. En reconnaissant un produit de Cauchy, exprimer sa somme sur $] -R, R[$.

c. On rappelle que la suite de terme général $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ possède une limite finie, notée γ . En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand x tend vers 1.

Exercice 6. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} z^n$. Idem avec $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} z^n$.

Exercice 7. ()** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$. Généraliser.

Exercice 8. (*) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$. Idem avec $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.

Exercice 9. ()** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Exercice 10. (*) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ d'une variable réelle.

Exprimer la fonction f' à l'aide de fonctions usuelles puis exprimer $f(x)$ à l'aide d'une intégrale.

Exercice 11. ()** Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$.

a. Pour tout c dans $]0, 1[$, prouver la minoration $a_n \geq (1-c)(1+c^2)^n$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. Exprimer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 12. (*) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puis déterminer son développement au moyen d'une équation différentielle.

Exercice 13. ()** On considère deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$ vaut au moins $R_a R_b$.

Donner un exemple où R vaut $R_a R_b$ et un exemple où ça n'est pas le cas.

Exercice 14. (*) On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .

Exercice 15. ()** Pour tout p dans $\mathbb{N}$, montrer la propriété suivante

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n = p!.$$

On procédera par récurrence.

Exercice 16. ()** Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe λ dans $]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda x).$$

a. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout $\alpha > 0$, montrer les relations $x^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$ et $f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\alpha x})$.

Exercice 17. (*)** Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\sqrt[n]{|a_n|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right);$

(ii) la série entière $\sum_{n \geq 0} n! a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

Exercice 18. ()** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $[1, n]$, c'est-à-dire le nombre d'applications $f : [1, n] \rightarrow [1, n]$ telles que $f \circ f = \text{Id}$. Par convention, on pose $I_0 = 1$.

a. Calculer I_1, I_2, I_3 .

b. (***) Pour tout entier $n \geq 3$, prouver la relation $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$ et vérifier qu'elle est valable pour $n = 2$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $I_n \leq n!$ et en déduire que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$$

est définie sur $] -1, 1[$.

d. Pour tout x dans $] -1, 1[$, trouver un lien entre $f'(x)$ et $f(x)$.

e. En déduire une expression de $f(x)$ puis une expression de I_n sous forme d'une somme.