Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 4 — piste bleue

Question préliminaire. Le calcul donne

$$M \times \begin{bmatrix} b & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = e \times I_2.$$

On en déduit l'égalité

$$M^{-1} = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}.$$

I.A.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe les égalités

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ -a_0 x_n - a_1 x_{n+1} \end{bmatrix}$$

Ainsi, en choisissant $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, on a la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A \times X_n.$$

I.A.2. Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + a_1 X + a_0.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A , c'est-à-dire les solutions de l'équation $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

I.A.3.a. Le polynôme caractéristique de A est scindé, à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable et ses espaces propres sont de dimension 1.

Les matrices Q de $GL(\mathbb{C})$ telles que $AQ = QD$ sont alors exactement les matrices dont les colonnes sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .

Soit $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. On trouve

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

On observe alors l'égalité

$$(A - \lambda I_2) \times \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_0 - a_1 \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $Q_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ est donc un vecteur directeur de la droite $E_\lambda(A)$.

Les matrices Q demandées sont donc exactement les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1 \lambda_1 & t_2 \lambda_2 \end{bmatrix},$$

où t_1 et t_2 sont des éléments de $\mathbb{C}^*$.

I.A.3.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$A^n = (QDQ^{-1})^n = QD^n Q^{-1} = Q \times \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \times Q^{-1}.$$

I.A.4.a. Le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$\chi_A = (X - \lambda)^2 = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2$$

donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient $a_0 = \lambda^2$ et $a_1 = -2\lambda$.

I.A.4.b. Notons $\mathcal{E} = (E_1, E_2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Notons f_A l'endomorphisme $U \mapsto A \times U$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. On sait que A est la matrice de f_A relativement à la base $\mathcal{E}$.

Soit Q une matrice de $GL_2(\mathbb{C})$. Notons Q_1 et Q_2 ses colonnes et posons $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2)$. La famille $\mathcal{Q}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et la matrice $Q^{-1}AQ$ est la matrice de f_A relativement à cette base.

L'énoncé nous demande donc de trouver quels sont les choix de Q_1 et Q_2 pour lesquels on a

$$f_A(Q_1) = \lambda Q_1 \quad \text{et} \quad f_A(Q_2) = Q_1 + \lambda Q_2.$$

Il s'agit donc de choisir pour Q_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ puis de choisir Q_2 de manière à avoir $(A - \lambda I_2)Q_2 = Q_1$.

Notons que si Q_2 et Q_1 sont choisis ainsi, alors Q_2 n'est pas dans $\text{Ker}(A - \lambda I_2)$ donc (Q_1, Q_2) est une famille libre, ce qui en fait une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ automatiquement.

Observons tout d'abord l'égalité

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

En reprenant la notation Q_λ de la question I.A.3.a, on observe que le vecteur Q_λ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

On observe également l'égalité $(A - \lambda I_2)E_2 = Q_\lambda$.

Rappel. Si X_0 est une solution d'une équation linéaire de la forme $M \times X = Y$ (d'inconnue X), alors l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\{X_0 + Z ; Z \in \text{Ker}(M)\}.$$

Les choix possibles pour le couple (Q_1, Q_2) sont donc

$$Q_1 = tQ_\lambda, \quad Q_2 = sQ_\lambda + tE_2, \quad (s, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

Les matrices Q solutions du problème sont donc les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} t & s \\ t\lambda & s\lambda + t \end{bmatrix}, \quad (s, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

I.A.4.c. Considérons la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice N^2 est nulle, ce qui donne $N^k = 0$ pour tout entier $k \geq 2$. Soit un entier $n \geq 1$. Les matrices N et I_2 commutent, donc, par la formule du binôme

$$T^n = (\lambda I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k} = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

On en tire l'égalité

$$A^n = Q \times T^n \times Q^{-1} = Q \times \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \times Q^{-1}.$$

Par ailleurs, l'égalité $A^0 = I_2$ est connue.

I.A.5. Rappelons que χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$. Il admet donc deux racines distinctes ou une racine double.

Si χ_A admet deux racines distinctes, comme on l'a déjà vu en I.A.3.a, la matrice A est diagonalisable.

Dans le cas contraire, la matrice A admet une seule valeur propre λ et on a vu que la matrice $A - \lambda I_2$ est de rang 1. La formule du rang donne alors

$$\dim(E_\lambda(A)) = 2 - \text{rg}(A - \lambda I_2) = 1 < 2 = \text{mult}(\lambda, A)$$

donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

I.A.6.a. Dans l'exemple 1, on trouve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A s'écrit $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. On applique donc les résultats de I.A.3 en prenant $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Un choix possible de Q est

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Son déterminant vaut 1. Le calcul de la question préliminaire donne

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le raisonnement de I.A.3.a (et du cours, surtout) donne

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La formule de la question I.A.3.b s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = Q \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \times Q^{-1}.$$

Le calcul explicite donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{bmatrix} 2 - 2^n & -1 + 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & -1 + 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

En itérant la relation de récurrence de la question I.A.1, il vient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \times X_0$$

puis $x_n = (2 - 2^n)x_0 + (-1 + 2^n)x_1$.

I.A.6.b. Dans l'exemple 2, on trouve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. On applique donc les résultats de I.A.4 en prenant $\lambda = 2$.

Un choix possible de Q est

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d'inverse} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $T = Q^{-1}AQ$ est alors donnée par $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ses puissances sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

On en déduit les puissances de A

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = Q \times T^n \times Q^{-1} = \begin{bmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{bmatrix}.$$

On obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \times X_0$$

puis $x_n = -(n-1)2^n x_0 + n2^{n-1} x_1$.

I.B.1. On trouve $\chi_A = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = P$.

I.B.2. La linéarité et l'injectivité sont directes. L'application Φ n'est pas surjective. En effet, si on prend une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ dont les deux premiers termes sont par exemple

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cette suite n'est pas dans l'image de Φ .

I.B.3.a. On remarque pour commencer la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ -a_0x_n - a_1x_{n+1} - a_2x_{n+2} \end{bmatrix} = A \times X_n.$$

Ensuite, par itération ou par récurrence, on en déduit l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \times X_0.$$

I.B.3.b. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$. On suppose qu'elle vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

Cette suite vérifie donc la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A \times X_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduisons les coefficients de X_n , notés comme suit

$$X_n = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{bmatrix}.$$

La relation de récurrence donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} &= \beta_n \\ \beta_{n+1} &= \gamma_n \\ \gamma_{n+1} &= -a_0\alpha_n - a_1\beta_n - a_2\gamma_n \end{cases}$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \beta_n &= \alpha_{n+1} \\ \gamma_n &= \alpha_{n+2} \\ \alpha_{n+3} &= -a_0\alpha_n - a_1\alpha_{n+1} - a_2\alpha_{n+2}. \end{cases}$$

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc un élément de $\mathcal{R}_P$ et la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est son image par Φ . Cette suite de vecteurs est donc un élément de $\Phi(\mathcal{R}_P)$.

I.B.4. On va considérer que (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ plutôt que de $\mathbb{C}^3$, afin que la question posée ait un sens.

La question I.B.3 donne le paramétrage

$$\Phi(\mathcal{R}_P) = \{(A^n U)_{n \in \mathbb{N}} ; U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})\}.$$

On peut donc définir l'application $\varphi_A : U \mapsto (A^n U)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ vers $\Phi(\mathcal{R}_P)$ et cette application linéaire est surjective.

Soit $U \in \text{Ker}(\varphi_A)$. On a alors en particulier $A^0 U = 0$, c'est-à-dire $U = 0$. L'application linéaire φ_A est donc injective.

On en déduit que c'est un isomorphisme, si bien que

$$\dim(\Phi(\mathcal{R}_P)) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})) = 3.$$

L'application Φ étant injective, on a aussi

$$\dim(\Phi(\mathcal{R}_P)) = \dim(\mathcal{R}_P) \quad \text{donc} \quad \dim(\mathcal{R}_P) = 3.$$

On n'en a pas eu besoin, mais répondons quand même à la question intermédiaire : l'isomorphisme φ_A envoie la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ sur une base de $\Phi(\mathcal{R}_P)$ donc le triplet $(\varphi_A(e_1), \varphi_A(e_2), \varphi_A(e_3))$ est une base de cet espace vectoriel.

I.C.1.a. La matrice A associée au polynôme P est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

On remarque que 1 est une racine de P . On en déduit la factorisation

$$P = (X - 1) \times \left(X^2 - X + \frac{1}{2} \right) \quad \text{puis} \quad P = (X - 1) \times \left(X - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \times \left(X - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right).$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

I.C.1.b. Voilà une question bien étrange : la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est définie nulle part !

Je vais présumer qu'il faut comprendre qu'il s'agit de la suite de terme général $X_n = A^n X_0$.

La question suivante me souffle le choix

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

qui est apparemment un vecteur propre pour la valeur propre 1. On obtient alors $X_n = X_0$ pour tout entier n , ce qui n'est pas très significatif.

La personne qui a conçu cet énoncé a vraisemblablement compté sur le choix $X_0 = e_1$. On observe qu'après quelques itérations, le vecteur X_n est proche du vecteur propre évoqué ci-dessus.

I.C.1.c. Après développement selon la première ligne (ou toute autre méthode), on trouve $\det(Q) = -1$, si bien que la matrice Q est inversible.

Un calcul direct donne

$$A \times Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q \times T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

L'égalité $AQ = QT$ et l'inversibilité de Q donnent $Q^{-1}AQ = T$.

I.C.1.d. Le calcul donne

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad T^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad T^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

On remarque que T^4 s'écrit sous la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}I_2 \end{bmatrix}$, ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad T^{4p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^p I_2 \end{bmatrix}.$$

On en déduit les expressions suivantes

$$T^{4p+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^p & -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \\ 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^p & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \end{bmatrix}, \quad T^{4p+2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \\ 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^p & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{4p+3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^{p+1} & \left(-\frac{1}{4}\right)^{p+1} \\ 0 & -\left(-\frac{1}{4}\right)^{p+1} & \left(-\frac{1}{4}\right)^{p+1} \end{bmatrix}.$$

I.C.1.e. Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation $X_{n+1} = AX_n$ donne

$$Y_{n+1} = Q^{-1}AX_n = TQ^{-1}X_n = TY_n.$$

En itérant cette relation de récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = T^n Y_0.$$

On observe que les quatre suites $(T^{4p+k})_{p \in \mathbb{N}}$ (pour k variant de 0 à 3) convergent vers la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L .

L'application $M \mapsto MY_0$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. Ces deux espaces sont de dimension finie donc cette application est continue. On en déduit que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur LY_0 .

De même, l'endomorphisme $U \mapsto QU$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est continue donc la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $QLY_0 = QLQ^{-1}X_0$.

On rappelle que la convergence d'une suite de matrices équivaut à la convergence de chacune des suites de coefficients. La convergence de la suite vectorielle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne donc la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque. En notant Q_1, Q_2, Q_3 les colonnes de Q , la matrice QLQ^{-1} est canoniquement associée à la projection sur $\text{Vect}(Q_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(Q_2, Q_3)$. Le vecteur limite de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc l'image de X_0 par cette projection.

I.C.2.a. On remarque que 1 est une racine de P . On en déduit la factorisation

$$P = (X - 1)(X^2 - X + 1).$$

Les racines de $X^2 - X + 1$ sont

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}.$$

On obtient donc la factorisation

$$P = (X - 1)(X - \omega)(X - \bar{\omega}).$$

Le polynôme P est scindé, à racines simples, donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Il existe donc une matrice Q de $GL_3(\mathbb{C})$ telle qu'en posant $D = Q^{-1}AQ$, on ait

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{bmatrix}.$$

Remarquons que ω et son conjugué sont des racines sixièmes de 1. On en déduit l'égalité $D^6 = I_3$ puis $A^6 = I_3$.

La suite des puissances de A est donc 6-périodique. On en déduit que toute suite de vecteurs dont le terme général est de la forme $A^n X_0$ est 6-périodique.

Les résultats de I.B permettent d'en déduire que les suites de $\mathcal{R}_P$ sont 6-périodiques.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{R}_P$. Notons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'image de cette suite par Φ . On obtient alors l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = QD^n Q^{-1} X_0 = Q \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega}^n \end{bmatrix} \times Q^{-1} X_0.$$

Considérons les vecteurs colonnes

$$C_1 = Q \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times Q^{-1} X_0, \quad C_2 = Q \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times Q^{-1} X_0, \quad C_3 = Q \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times Q^{-1} X_0.$$

On obtient donc la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = C_1 + \omega^n C_2 + \bar{\omega}^n C_3.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, notons a_k le premier coefficient de la colonne C_k . On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = a_1 + a_2 e^{in\pi/3} + a_3 e^{-in\pi/3} = a_1 + (a_2 + a_3) \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i(a_2 - a_3) \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

I.C.3.a. Développons l'expression du polynôme P .

$$P = (X - \lambda)(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = X^3 - (\lambda + 2\mu)X^2 + (2\lambda\mu + \mu^2)X - \lambda\mu^2.$$

La matrice A associée à ce polynôme s'écrit donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda\mu^2 & -2\lambda\mu - \mu^2 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$

I.C.3.b. Si P admet une racine double, alors il est de la forme proposée dans cette partie donc la matrice A est semblable à une matrice T de la forme admise.

La matrice T admet μ pour valeur propre d'ordre 2.

$$T - \mu I_3 = \begin{bmatrix} \lambda - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La différence $\lambda - \mu$ étant non nulle, cette matrice est de rang 2. D'après le théorème du rang, on en déduit que l'espace propre $E_\mu(T)$ est de dimension 1. Cette dimension est différente de la multiplicité de la valeur propre associée donc la matrice T n'est pas diagonalisable.

La matrice A étant semblable à T , elle n'est pas diagonalisable non plus.

I.C.3.c. Voilà une question très difficile. Je vais commencer par déplacer les questions en montrant qu'elles sont équivalentes à des questions sur la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour commencer, je vais montrer que la proposition « pour tout choix de X_0 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul » équivaut à « la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle ».

Commençons par supposer que la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

La formule $A^n = QT^nQ^{-1}$ et la continuité de l'endomorphisme $M \mapsto QMQ^{-1}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ montrent que la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers la matrice nulle.

La formule $X_n = A^n X_0$ et la continuité de l'application linéaire $M \mapsto MX_0$ montrent que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul, quel que soit le choix du vecteur initial X_0 .

Réciproquement, supposons que pour tout choix de X_0 , la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul.

Le choix $X_0 = e_1$ donne $X_n = A^n e_1$, ce qui est la première colonne de la matrice A^n . On en déduit que les coefficients de la première colonne de A^n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

De la même manière, les autres coefficients de A^n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers la matrice nulle.

Par la même méthode que pour l'autre implication, on en déduit que la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

L'équivalence annoncée est démontrée.

Maintenant, remarquons pour tout entier $n \geq 1$ l'égalité

$$T^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}.$$

La convergence de la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la matrice nulle équivaut à ce que $\lambda^n, \mu^n, n\mu^{n-1}$ tendent vers 0. Cela équivaut à ce que les deux inégalités $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$ soient vérifiées.

Remarque. Pour cette question I.C.3, l'énoncé se place dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{C}$ alors que ça ne change rien du tout aux conclusions ni aux méthodes employées.

Par une méthode similaire, que je ne détaille pas, l'énoncé « pour tout choix de X_0 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée » équivaut à « la suite de matrices $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ».

Cela équivaut à ce que les suites $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n\lambda^{n-1})_{n \geq 1}$ soient bornées. Ça équivaut à ce que les inégalités $|\lambda| \leq 1$ et $|\mu| < 1$ soient vérifiées.

II.A.1. Une récurrence directe donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $X_n = P_n X_0$.

II.A.2. La question précédente réalise l'analyse de cette question : en cas d'existence, ce système possède une unique solution, qui est la suite $(P_n a)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement (synthèse), on constate que la suite $(P_n a)_{n \in \mathbb{N}}$ en est bien une solution.

II.A.3.a. La suite nulle de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$ vérifie bien le système $(\mathcal{H})$.

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathcal{S}$, ainsi qu'une constante $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons Z la suite de terme général $Z_n = X_n + \lambda Y_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$Z_{n+1} = X_{n+1} + \lambda Y_{n+1} = A_n X_n + \lambda A_n Y_n = A_n Z_n.$$

Cette suite Z est donc encore un élément de $\mathcal{S}$. Cet ensemble est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$.

II.A.3.b. La linéarité de Ψ est immédiate. Le fait que Ψ soit une bijection est ce que démontre la question II.A.2.

On en déduit l'égalité $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathbb{C}^k) = k$.

II.A.3.c. Les k solutions des k systèmes mentionnés sont $\Psi^{-1}(e_1), \dots, \Psi^{-1}(e_n)$. Ce sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^k$ par l'isomorphisme Ψ^{-1} donc ces vecteurs forment une base de $\mathcal{S}$.

Remarque. Ce sont bien ces vecteurs qui *forment* une base de cet espace et non pas la famille de ces vecteurs. Par contre, la famille de ces vecteurs *est* une base de cet espace.

II.B.1. Le calcul des premiers termes de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mène à conjecturer l'expression

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & -h_n \\ -h_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette expression se démontre alors facilement par récurrence.

II.B.2. L'expression des solutions $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = P_n X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ n+1 \\ -x_0 h_n + x_1 \end{bmatrix}.$$

II.B.3. D'après II.A.3.c, une base de l'espace des solutions est $((P_n e_1)_{n \in \mathbb{N}}, (P_n e_2)_{n \in \mathbb{N}})$. Ces suites ont pour termes généraux

$$P_n e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ n+1 \\ -h_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_n e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

II.B.4. On rappelle que h_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, si x_1 n'est pas nul, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée; elle est donc divergente dans ce cas. À l'inverse, si x_1 est nul, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante; elle est donc convergente dans ce cas.

II.C.1.a. L'itération de la relation de récurrence donne

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n_0+p} = A_{n_0+p-1} \cdots A_{n_0} X_{n_0} = A_{n_0+p-1} \cdots A_{n_0} a$$

et

$$\forall p \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket, \quad X_{n_0} = A_{n_0-1} \cdots A_{n_0-p} X_{n_0-p} \quad \text{donc} \quad X_{n_0-p} = A_{n_0-p}^{-1} \cdots A_{n_0-1}^{-1} a.$$

II.C.1.b. La question précédente est l'analyse : le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ admet une unique solution en cas d'existence.

Réciproquement, si on définit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les formules obtenues à la question précédente, celle-ci est bien une solution du système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$.

II.C.2.a. Le rang de la matrice produit $A_{n_0-1} \cdots A_0$ est majoré par les rangs des matrices $A_0, \dots, A_{n_0-1}$. En particulier, il est majoré par le rang de A_p , lui-même majoré par $k-1$. Cette matrice produit n'est donc pas inversible.

Il est donc possible de choisir a n'appartenant pas à l'image de cette matrice produit, auquel cas le système $(\mathcal{H}_{n_0,a})$ n'a pas de solution.

II.C.2.b. Plaçons-nous dans le cas où A_0 est la matrice nulle et a est le vecteur nul. Prenons X_0 quelconque et prenons X_n nul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une solution de $(\mathcal{H}_{n_0,a})$.

Il peut donc y avoir plusieurs solutions à ce système.

II.D. Il y a une erreur de formulation dans le préambule de cette partie. L'énoncé suppose que pour tout $p \in \llbracket 0, n_0-1 \rrbracket$, « les matrices A_p sont inversibles », alors qu'en réalité, à p fixé, il y a une seule matrice A_p .

Je le mentionne car c'est une erreur que je rencontre souvent dans les copies.

II.D.1.a. Comme en II.C.1, on procède par analyse-synthèse.

Analyse. On considère une hypothétique solution $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\mathcal{G}_{n_0, a})$. En itérant la relation de récurrence, on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la relation

$$\begin{aligned} X_{n_0+p} &= b_{n_0+p-1} + A_{n_0+p-1} X_{n_0+p-1} \\ &= b_{n_0+p-1} + A_{n_0+p-1} (b_{n_0+p-2} + A_{n_0+p-2} X_{n_0+p-2}) \\ &= \dots \\ &= b_{n_0+p-1} + A_{n_0+p-1} (b_{n_0+p-2} + A_{n_0+p-2} (\dots (b_{n_0} + A_{n_0} X_{n_0}) \dots)) \\ &= b_{n_0+p-1} + A_{n_0+p-1} (b_{n_0+p-2} + A_{n_0+p-2} (\dots (b_{n_0} + A_{n_0} a) \dots)). \end{aligned}$$

De même, pour tout $p \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$, on obtient

$$\begin{aligned} X_{n_0-p} &= A_{n_0-p}^{-1} (-b_{n_0-p} + X_{n_0-p+1}) \\ &= A_{n_0-p}^{-1} (-b_{n_0-p} + A_{n_0-p+1}^{-1} (-b_{n_0-p+1} + X_{n_0-p+2})) \\ &= \dots \\ &= A_{n_0-p}^{-1} (-b_{n_0-p} + A_{n_0-p+1}^{-1} (-b_{n_0-p+1} + A_{n_0-p+2}^{-1} (\dots (-b_{n_0-1} + A_{n_0-1}^{-1} X_{n_0}) \dots))) \\ &= A_{n_0-p}^{-1} (-b_{n_0-p} + A_{n_0-p+1}^{-1} (-b_{n_0-p+1} + A_{n_0-p+2}^{-1} (\dots (-b_{n_0-1} + A_{n_0-1}^{-1} a) \dots))). \end{aligned}$$

Ceci prouve l'unicité en cas d'existence.

Synthèse. Si on définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les formules ci-dessus, on doit constater que c'est bien une solution du système $(\mathcal{G}_{n_0, a})$.

II.D.1.b. Cette question est un peu datée et j'aurais pu faire l'effort de la reformuler dans le vocabulaire Python. **À faire.**

II.D.2. Fixons $p \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$. On fait l'hypothèse

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j Z_p^j = 0.$$

La suite $\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j Z_p^j \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une solution du système

$$\begin{cases} X_{n+1} &= A_n X_n \\ X_p &= 0. \end{cases}$$

On sait que l'unique solution de ce système est la suite nulle donc on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j Z_n^j = 0.$$

Les familles $(Z_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (Z_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre donc les λ_j sont tous nuls.

On a alors prouvé que les vecteurs $Z_p^1, \dots, Z_p^k$ forment une famille libre. C'est une famille libre de k vecteurs de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{C})$, qui est de dimension k , donc c'en est une base.

II.D.3.a. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On introduit la décomposition du vecteur Y_n dans la base $(Z_n^1, \dots, Z_n^k)$ de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{C})$

$$Y_n = \sum_{i=1}^k c_n^i Z_n^i.$$

On remarque alors l'égalité

$$Y_n = Z_n \times \begin{bmatrix} C_n^1 \\ \vdots \\ C_n^k \end{bmatrix}.$$

II.D.3.b. Commençons par supposer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de $\mathcal{G}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité $Y_{n+1} = A_n Y_n + b_n$ donne

$$Z_{n+1} \times C_{n+1} = A_n Z_n \times C_n + b_n.$$

Rappelons maintenant que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a la relation $Z_{n+1}^i = A_n Z_n^i$. On en déduit l'égalité $Z_{n+1} = A_n Z_n$ puis

$$Z_{n+1} \times C_{n+1} = Z_{n+1} \times C_n + b_n.$$

La famille $(Z_{n+1}^1, \dots, Z_{n+1}^k)$ est une base de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{C})$ donc la matrice Z_{n+1} est inversible. On en tire la relation

$$C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} \times b_n.$$

Réciproquement, on suppose que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie cette relation de récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité $C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} \times b_n$ donne

$$Z_{n+1} C_{n+1} = Z_{n+1} C_n + b_n.$$

On remarque les égalités $Z_{n+1} C_{n+1} = Y_{n+1}$ et $Z_{n+1} C_n = A_n Z_n C_n = A_n Y_n$ donc $Y_{n+1} = A_n Y_n + b_n$.

L'équivalence demandée est démontrée.

II.E.1. D'après II.B.3, un choix possible pour la matrice Z_n est la matrice P_n de la question II.B.1, c'est-à-dire

$$Z_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & 1 \\ -h_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors

$$Z_{n+1}^{-1} = (n+2) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_{n+1} & \frac{1}{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+2 & 0 \\ (n+2)h_{n+1} & 1 \end{bmatrix}.$$

En notant α_n et β_n les coefficients de la colonne C_n , la relation de récurrence $C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n$ s'écrit donc

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1 \\ \beta_{n+1} = \beta_n + h_{n+1} - h_n \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1 \\ \beta_{n+1} = \beta_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

II.E.2. En itérant les relations de récurrence de la question précédente, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 + n \\ \beta_n = \beta_0 + h_n. \end{cases}$$

La matrice Z_0 est I_2 donc $C_0 = Y_0$, si bien que $(\alpha_0, \beta_0) = (x_0, y_0)$. On obtient donc finalement

$$Y_n = Z_n C_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 + n \\ y_0 + h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_0 + n}{n+1} \\ -h_n(x_0 + n) + y_0 + h_n \end{bmatrix}.$$