Compte rendu du devoir surveillé n° 4 — piste rouge

Thèmes abordés. Algèbre linéaire. Réduction.

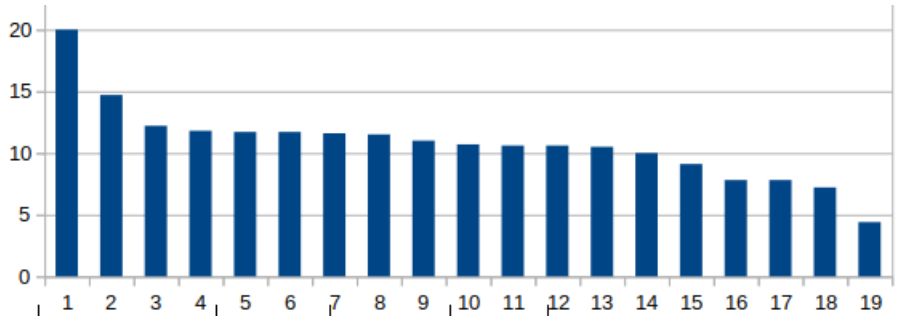
À propos du sujet.

Cet énoncé a été posé en 2002 au concours commun Mines-Ponts. C'était une épreuve de trois heures, que j'ai posé néanmoins tel quel en quatre heures, estimant que cette durée serait bien adaptée. De fait, beaucoup d'entre vous ont abordé la plupart des questions.

Ce sujet étudie une notion qui n'est pas à notre programme (semi-linéarité des $\mathbb{R}$-endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et explore ce qui distingue cette notion des notions dont nous avons l'habitude. L'ensemble est d'une difficulté modérée, mais le fait que les notions étudiées soient voisines des notions usuelles et que les notations de l'énoncé fassent double emploi avec celles des notions usuelles apportait une complication.

Pour la notation, le total sur 160 a été divisé par 5 et le quotient a été arrondi au dixième de point supérieur.

La médiane se situe à 10,7, avec une moyenne à 10,78 et un écart-type de 3,17. C'est convenable, même s'il y a eu pas mal de points gâchés sur des erreurs de calcul.



Remarques générales. Les abréviations sont à proscrire, notamment « ssi ».

La numérotation arborescente des questions est à respecter. Si vous écrivez seulement « b » dans la marge, la personne qui corrige doit fouiller pour savoir quelle question est abordée ; c'est une perte de temps irritante et il est déraisonnable de chercher à irriter une personne qui influe à ce point sur votre avenir.

La définition d'un vecteur co-propre, comme celle d'un vecteur propre, réclame que le vecteur soit non nul. Tout oubli à ce sujet a été sanctionné. Cet oubli a été extrêmement fréquent.

Les notions de valeurs propres et de valeurs co-propres coexistent dans certaines questions, ce qui est propice aux lapsus. Il faut redoubler de vigilance car on ne vous laissera pas le bénéfice du doute dans ce cas.

Partie I

Le maximum de points réalisable sur cette partie est de 104. La moyenne de la classe sur cette partie est de 40,6. Le meilleur total obtenu est de 59,25 points.

	I.1.a	I.1.b	I.1.c	I.1.d	I.2.a	I.2.b	I.2.c	I.2.d	I.2.e
Barème	0,5	1,5	2	1	1	2	1,5	1	1
Réussite	82,9 %	61,2 %	23,7 %	90,1 %	76,3 %	35,5 %	80,9 %	36,2 %	40,8 %

	I.3.a	I.3.b	I.4.a	I.4.b	I.4.c	I.4.d	I.4.e	I.5.a	I.5.b	I.5.c
Barème	2	1	1	1,5	1	1	2,5	1,5	1,5	1,5
Réussite	0,0 %	13,2 %	78,3 %	40,1 %	77,0 %	77,0 %	20,4 %	1,3 %	5,3 %	21,1 %

En I.1.c, beaucoup ont confondu « les expressions ne sont pas identiques » avec « les valeurs sont différentes », ce qui est une vraie erreur de logique. D'une part, il peut arriver que les valeurs soient identiques pour certaines valeurs des variables. D'autre part, des expressions différentes peuvent avoir toujours la même valeur (par exemple 1 et $\cos^2(x) + \sin^2(x)$).

Au demeurant, il y a une erreur dans mon corrigé, que je rectifie en annexe.

En I.2.d, beaucoup montrent que les valeurs co-propres de u sont *des* valeurs co-propres de $M_{\mathcal{E}}(u)$ et ne font pas la réciproque. Il peut s'agir d'une mauvaise lecture de l'énoncé ou d'une erreur de logique plus profonde. Dans un cas comme dans l'autre, c'est un gâchis de points faciles et il faudra éviter ça à l'avenir.

Fiasco complet dans l'application numérique de la question I.3.a. Presque personne n'a posé le bon système. Les gens qui ont posé le bon système se sont ensuite trompés dans les calculs.

On lit parfois que les valeurs co-propres de A sont i et $-$i, mais cela contredit I.1.b. Attention à la cohérence entre les diverses affirmations au fil du devoir.

En I.4.b, l'égalité $A\bar{Y} = \sqrt{\lambda}Y$ est généralement obtenue mais elle ne suffit pas à conclure puisque Y peut être nul. Cela appelait donc deux cas.

Dans la moitié des copies, la question de la nullité de Y n'est même pas abordée. Dans l'autre moitié, il est affirmé péremptoirement que Y est non nul ou bien ce résultat est admis. Je trouve surprenant que personne n'ait envisagé que ce vecteur puisse être nul et que ce cas soit compatible avec l'objectif recherché. L'objectif n'était en effet pas que Y soit un vecteur co-propre mais que $\sqrt{\lambda}$ soit une valeur co-propre.

Dans l'application numérique de la question I.4.e, beaucoup de points sont gâchés dans des erreurs de calcul. Beaucoup de raisonnements sont également inachevés.

Mon corrigé est incomplet pour cette question : j'ai oublié le cas $m = 0$. Voir l'annexe ci-dessous.

Beaucoup d'erreurs de calcul encore en I.5.c. On propose souvent comme vecteur co-propre un vecteur qui ne fonctionne pas.

Partie II

Le maximum de points réalisable sur le problème II est de 56. La moyenne de la classe sur ce problème est de 13,45. Le meilleur total obtenu est de 45.

II.1	II.2.a	II.2.b	II.3.a	II.3.b	II.3.c	II.4	II.5.a	II.5.b
1	1,5	2	1	2,5	1	2	1	2
81,6 %	0,0 %	23,7 %	84,2 %	23,7 %	9,2 %	13,2 %	23,0 %	2,6 %

La question II.2.a est quasiment la seule à utiliser un résultat du cours (les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, ce qui donne que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre). Cela a échappé à tout le monde.

En II.3.b, le lien entre l'inversibilité de la matrice $S(\theta)$ et le fait qu'un certain nombre ne soit pas valeur propre de A a rarement été vu.

En II.5, j'ai compté séparément les questions de diagonalisabilité et de co-diagonalisabilité.

Écrire $\dim(\mathrm{Ker}(A - iI_2)) = 1 < 2$ ne suffit pas pour justifier que A n'est pas diagonalisable : ça ne fait directement référence à aucun critère. Ou bien on écrit que la somme des dimensions des espaces propres est strictement inférieure à 2, ou bien on écrit que la dimension de cet espace propre est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

Les études de co-diagonalisabilité s'appuyaient sur divers critères rencontrés au cours du sujet et c'est dommage que presque personne n'ait réussi à les utiliser.

Erratum du corrigé

I.1.c. Prenons un élément x non nul de E_μ. Comme on vient de le voir, le vecteur ix est un vecteur co-propre de u pour la valeur propre $-\mu$. Ainsi, d'après **I.1.a**, si μ est non nul, le vecteur ix ne peut pas être un vecteur co-propre de u pour la valeur co-propre μ.

I.4.e. Quatrième cas : $m = 0$. On sait alors par la question **I.3.a** que la matrice A n'a pas de valeurs co-propres du tout.