Exercice 1. (**) On fixe un entier n strictement positif. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On se donne une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de E défini par $f(\mathrm{X}) = \mathrm{MX}$.

On note $\mathcal{B}_n = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ la base canonique de E et on rappelle que la matrice de f relativement à cette base est la matrice M.

1. Dans cette question, on suppose que l'entier n est impair. Montrer que la matrice M possède au moins une valeur propre réelle.

2. Dans cette question, on considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On pose $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et on suppose que λ est une valeur propre de M. On considère alors un vecteur propre Z de M associé à cette valeur propre. On note $\overline{\mathrm{Z}}$ le vecteur conjugué de Z, c'est-à-dire le vecteur colonne dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Z.

On introduit les vecteurs colonnes

$$\mathrm{X} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Z} + \overline{\mathrm{Z}}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{Z} - \overline{\mathrm{Z}}\right).$$

a. Vérifier que X et Y sont des éléments de E.

b. Prouver que (X, Y) est une famille libre de E.

c. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par X et Y. Montrer que F est stable par f et écrire la matrice de f_{F} (l'endomorphisme de F induit par f) relativement à la base (X, Y).

3. Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède une droite stable ou un plan stable.

4. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ n'admettant aucune droite stable et aucun plan stable.

5. Dans cette question, on considère le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$, noté (S), associé à la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle *trajectoires* du système (S) les courbes de $\mathbb{R}^3$ décrites par les solutions du système (S). On veut déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes de ce système.

On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice A.

a. Déterminer un plan F et une droite G stables par f et supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b. En déduire une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice T définie par $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit de la forme

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

c. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{G}$. Déterminer l'unique solution de (S) vérifiant la condition initiale $\mathrm{X}(0) = \mathrm{U}$.

Exercice 2. (**) On fixe $\alpha > 0$ et on suppose que α n'est pas un entier. On définit sur $[-1, 1]$ la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \cos(\alpha \operatorname{Arccos}(x)).$$

1. Justifier que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et vérifier que f_α est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0.$$

Cette équation différentielle est notée (E_α).

2. Trouver toutes les solutions développables en série entière de cette équation différentielle. En déduire que toutes les solutions de (E_α) sur $]-1, 1[$ sont développables en série entière sur cet intervalle.

3. Montrer que la fonction f_α est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et donner son développement en série entière.

Exercice 3. **Le wronskien**

Partie I — une propriété de la trace (***)

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on se donne une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout indice i de $[\![1, n]\!]$, on note $f_i(\mathrm{B})$ la matrice obtenue à partie de B en multipliant sa i-ième colonne par A. En d'autres termes, si on note $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ les colonnes de B, les colonnes de $f_i(\mathrm{B})$ sont $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{i-1}, \mathrm{AB}_i, \mathrm{B}_{i+1}, \ldots, \mathrm{B}_n$.

Enfin, pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dét}(f_i(\mathrm{B})).$$

I.1. Montrer que F est linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable.

I.2. Montrer que F est antisymétrique : pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout couple (i, j) d'indices distincts entre 1 et n, si C est la matrice obtenue à partir de B en permutant la i-ième et la j-ième colonnes de B, alors elle vérifie l'égalité $\mathrm{F}(\mathrm{C}) = -\mathrm{F}(\mathrm{B})$.

I.3. Calculer $\mathrm{F}(\mathrm{I}_n)$.

I.4. Prouver l'égalité $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{dét}(\mathrm{B})$ pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II — le wronskien (**)

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ non trivial (non réduit à l'ensemble vide ou à un singleton).

Pour toute famille $\mathcal{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice wronskienne de la famille $\mathcal{X}$ est la fonction définie de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\mathrm{W}_{\mathcal{X}} : t \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(\mathrm{X}_1(t), \ldots, \mathrm{X}_n(t)),$$

où $\mathcal{E} = (\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, la fonction $\mathrm{W}_{\mathcal{X}}$ est simplement notée W. Le *wronskien* de la famille $\mathcal{X}$ est alors la fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ par

$$w_{\mathcal{X}} : t \mapsto \mathrm{dét}(\mathrm{W}_{\mathcal{X}}(t)).$$

Là encore, en l'absence d'ambiguïté, la fonction $w_{\mathcal{X}}$ est simplement notée w. Pour tout t dans I, le nombre $w(t)$ est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $\mathrm{X}_1(t), \ldots, \mathrm{X}_n(t)$.

On se donne une fonction $\mathrm{A} : \mathrm{I} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. Le théorème de Cauchy linéaire nous enseigne que l'ensemble des solutions du système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ est alors un espace vectoriel de dimension n. Cet espace vectoriel est noté E_0 dans la suite.

Soit $\mathcal{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ une famille de n éléments de E_0. On note W sa matrice wronskienne et w son wronskien.

II.1. Pour tout t dans I, prouver la relation $w'(t) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}(t))w(t)$.

II.2. Montrer que si la fonction w n'est pas la fonction nulle, alors cette fonction ne s'annule en aucun point de I.

II.3. Montrer que w n'est pas la fonction nulle si, et seulement si, la famille $\mathcal{X}$ est une base de E_0.

On se donne une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0.$$

On a vu qu'une telle équation différentielle admet une réécriture sous la forme $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ en notant X la fonction vectorielle dont les coordonnées sont les fonctions x et x'.

Si (x_1, x_2) est un couple de solutions de cette équation différentielle, on lui associe donc un couple $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ de solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ et on peut donc lui associer le wronskien du couple $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$, qui est alors appelé également *wronskien du couple* (x_1, x_2).

II.4. Dans le cas où a est la fonction nulle, que dire du wronskien du couple (x_1, x_2) ?

II.5. On considère une équation différentielle $x'' + ax' + bx = 0$ à coefficients constants et on suppose que son équation caractéristique possède deux racines distinctes, notée r et s. Exprimer le wronskien de tout couple de solutions.

Partie III — la méthode de variation des constantes (**)

On se donne une fonction $\mathrm{A} : \mathrm{I} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère aussi une fonction $\mathrm{B} : \mathrm{I} \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue.

On note (S) le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$ et (S_0) le système $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$.

On considère une base $\mathcal{X}$ de l'espace vectoriel E_0 des solutions de (S_0) sur I. Sa matrice wronskienne est notée W et son wronskien est noté w.

On fixe t_0 dans I et U_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de trouver la solution du problème de Cauchy constitué du système (S) et de la condition initiale $\mathrm{X}(t_0) = \mathrm{U}_0$. L'existence et l'unicité de cette solution sont garanties par le théorème de Cauchy linéaire. Cette solution est notée Y.

Pour trouver une solution particulière de (S), on se donne des fonctions $c_1, \ldots, c_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on crée les fonctions vectorielles

$$\mathrm{C} : t \mapsto \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{W}(t)\,\mathrm{C}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\mathrm{X}_k(t).$$

III.1. Pour tout t dans I, prouver l'égalité $\mathrm{X}'(t) - \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) = \mathrm{W}(t)\mathrm{C}'(t)$.

III.2. En déduire une expression (sous forme intégrale) de la solution de (S) qui s'annule en t_0.

III.3. Obtenir finalement une expression de la fonction vectorielle Y.

III.4. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{ch}^2(t)}$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode ci-dessus (question très calculatoire).

Partie IV — la méthode du wronskien (*)

On reprend les notations de la question II.3 et on suppose que la fonction a est la fonction nulle, si bien que l'équation différentielle considérée s'écrit $x'' + b(t)x = 0$.

On fixe t_0 dans I et on considère les solutions x_0 et x_1 de cette équation différentielle définies par les conditions initiales

$$(x_0(t_0), x_0'(t_0)) = (1, 0) \qquad \text{et} \qquad (x_1(t_0), x_1'(t_0)) = (0, 1).$$

On suppose enfin que la fonction x_0 ne s'annule en aucun point de l'intervalle I. Le but de cette partie est d'obtenir une expression de x_1 en fonction de x_0.

On note w le wronskien du couple (x_0, x_1).

IV.1. Trouver une expression explicite de la fonction w.

IV.2. Exprimer la dérivée de la fonction x_1/x_0.

IV.3. En déduire une expression de x_1 au moyen d'une intégrale.

IV.4. Dans cette question, on prend $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on suppose que la fonction x_0 est la fonction $t \mapsto \cos^2(t)$.
En déduire la fonction b puis la fonction x_1.

Exercice 4. (**) Soient a et b deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Montrer que (E) possède un système fondamental de solutions (f, g) formé d'une fonction paire et d'une fonction impaire si, et seulement si, la fonction a est impaire et la fonction b est paire.
