Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 5 — piste bleue

I.A.1. Soit un entier $n \geq 2$. On trouve

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On connaît le développement limité

$$\ln(1+x) = x + \mathcal{O}_{x \rightarrow 0}(x^2), \quad \text{donc} \quad a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que la série de terme général $1/n^2$ converge. Par domination, on en déduit que la série de terme général a_n converge absolument, si bien qu'elle converge.

I.A.2. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = H_n - \ln(n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on observe la relation $u_n - u_{n-1} = a_n$. La série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$ est donc convergente. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente. En notant A la limite de cette suite, on obtient

$$H_n = \ln(n) + A + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Cette relation donne $H_n = \ln(n) + o(\ln(n))$, si bien que H_n est équivalent à $\ln(n)$.

I.B. Si r vaut 0, le terme général $H_n/(n+1)^r$ vaut H_n , ce qui tend vers $+\infty$. La série de terme général $H_n/(n+1)^r$ diverge donc grossièrement.

Si r vaut 1, on a la minoration

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{H_n}{(n+1)^r} \geq \frac{1}{n+1}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ est divergente (et à termes positifs) donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ diverge.

Faisons maintenant l'hypothèse $r \geq 2$. On a l'équivalent

$$\frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln(n)}{n^r}.$$

Par ailleurs, on sait que $\ln(n)/\sqrt{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne

$$\frac{\ln(n)}{n^r} = o\left(\frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{H_n}{(n+1)^r} = o\left(\frac{1}{n^{r-\frac{1}{2}}}\right).$$

L'inégalité $r - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} > 1$ donne la convergence de la série de terme général $1/n^{r-\frac{1}{2}}$ donc celle de terme général $H_n/(n+1)^r$.

Finalement, cette série converge si et seulement si $r \geq 2$.

I.C.1. On connaît les relations suivantes pour tout t dans $] -1, 1[$

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.$$

On sait également que les deux séries entières associées ont un rayon de convergence égal à 1.

I.C.2. Les deux développements en série entière de la question précédente s'écrivent sous la forme

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

en posant $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

ainsi que $b_n = 1$. Le théorème du produit de Cauchy donne alors pour tout t dans $] -1, 1[$ l'égalité

$$-\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}_{\text{noté } c_n} \right) t^n.$$

Cela prouve que la fonction $t \mapsto -\ln(1-t)/(1-t)$ est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$. Ses coefficients sont donnés par $c_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 0 \times b_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

Ce développement en série entière s'écrit donc finalement

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

I.D.1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $f_{p,q} : t \mapsto t^p \ln^q(t)$ est continue sur $]0, 1[$.

On observe que $\sqrt{t} f_{p,q}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. On en déduit que $f_{p,q}(t)$ est négligeable devant $1/\sqrt{t}$.

L'inégalité $1/2 < 1$ montre que la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$. On en déduit que la fonction $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

En particulier, l'intégrale $I_{p,q}$ existe.

I.D.2. Intégration par parties.

I.D.3. On fait tendre ε vers 0.

I.D.4. On itère la relation de récurrence.

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} \times \frac{-(q-1)}{p+1} I_{p,q-2} = \dots = \frac{-q}{p+1} \times \frac{-(q-1)}{p+1} \times \frac{-1}{p+1} I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} I_{p,0}.$$

Par ailleurs, on trouve

$$I_{p,0} = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} \quad \text{donc} \quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

I.E. Commençons par remarquer l'identité

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \ln^{r-1}(t) f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \ln^{r-1}(t).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la fonction $f_n : t \mapsto a_n t^n \ln^{r-1}(t)$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue et intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ (l'intégrabilité a été prouvée en I.D.1).

2 Le calcul préliminaire de cette question montre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$. Sa somme est la fonction $F_r : t \mapsto \ln(t)^{r-1} f(t)$.

3 La fonction f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ donc elle est continue sur cet intervalle. On en déduit que la fonction F est continue sur $]0, 1[$.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est de signe constant sur $]0, 1[$ (égal à $(-1)^n$). On en déduit les égalités

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \left| \int_0^1 f_n(t) dt \right| = |a_n| \times |I_{n,r-1}| = |a_n| \times \frac{(r-1)!}{(n+1)^r}.$$

La série de terme général $|a_n|/(n+1)^r$ converge par hypothèse de l'énoncé.

On en déduit la convergence de la série de terme général $\int_0^1 |f_n(t)| dt$.

Le théorème d'intégration terme à terme permet d'en déduire que la fonction F_r est intégrable sur $]0, 1[$ et qu'elle vérifie l'égalité

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \ln^{r-1}(t) f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

I.F.1. Soit un entier $r \geq 2$. Prenons pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question I.C.2, donnée par $c_0 = 0$ et $c_n = H_n$ si $n \geq 1$.

Cette suite est associée au développement en série entière de la fonction $f : t \mapsto -\ln(1-t)/(1-t)$ sur $] - 1, 1[$, comme on l'a vu en I.C.2.

On a vu en I.B que la série $\sum H_n/(n+1)^r$ est convergente (donc absolument convergente, ses termes étant positifs).

Le résultat de I.E s'écrit alors dans ce contexte

$$\int_0^1 \ln^{r-1}(t) \times \frac{-\ln(1-t)}{1-t} dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{(n+1)^r} = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}.$$

On en tire l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt.$$

I.F.2. Prenons deux éléments a et b de $]0, 1[$ tels que $a < b$ et effectuons une intégration par parties dans $\int_a^b \ln^{r-1}(t) \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$.

On dérive la fonction $t \mapsto \ln^{r-1}(t)$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$) en $t \mapsto (r-1) \ln^{r-2}(t)/t$.

On primitive la fonction $t \mapsto -\ln(1-t)/(1-t)$ en $t \mapsto \ln^2(1-t)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.

On obtient

$$\int_a^b \ln^{r-1}(t) \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = -\ln^{r-1}(b) \ln^2(1-b) + \ln^{r-1}(a) \ln^2(1-a) + (r-1) \int_a^b \frac{\ln^{r-2}(t) \ln^2(1-t)}{t} dt.$$

Quand a tend vers 0, le produit $\ln^{r-1}(a) \ln^2(1-a)$ est équivalent à $a^2 \ln^{r-1}(a)$ donc il tend vers 0.

Quand b tend vers 1, le produit $\ln^{r-1}(b) \ln^2(1-b)$ est équivalent à $(b-1)^{r-1} \ln^2(1-b)$ donc il tend vers 0 (on utilise ici que l'exposant $r-1$ est strictement positif).

On en déduit que l'intégrale du membre de droite à une limite finie quand a tend vers 0 puis quand b tend vers 1 et on obtient l'égalité

$$\int_0^1 \ln^{r-1}(t) \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = (r-1) \int_0^1 \frac{\ln^{r-2}(t) \ln^2(1-t)}{t} dt \quad \text{puis} \quad S_r = \frac{(-1)^r}{(r-2)!} \int_0^1 \frac{\ln^{r-2}(t) \ln^2(1-t)}{t} dt.$$

I.F.3. Le cas $r = 2$ s'écrit en particulier

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt.$$

La fonction $t \mapsto 1-t$, définie de $]0, 1[$ vers $]0, 1[$, est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui permet d'effectuer le changement de variable $s = 1-t$, qui donne

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{\ln^2(u)}{1-u} (-du) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(u)}{1-u} du.$$

Pour tout u dans $]0, 1[$, on connaît l'égalité

$$\frac{\ln^2(u)}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \ln^2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,2}(u).$$

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n,2}$ est continue et intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ (question I.D.1).

2 La série de fonctions $\sum f_{n,2}$ converge simplement sur $]0, 1[$.

3 Sa somme est la fonction $u \mapsto \frac{\ln^2(u)}{1-u}$, qui est continue sur $]0, 1[$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\int_0^1 |f_{n,2}(u)| du = \int_0^1 f_{n,2}(u) du = I_{n,2} = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

L'inégalité $3 > 1$ donne la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{(n+1)^3}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_{n,2}(u)| du$ converge.

Par application du théorème d'intégration terme à terme, il vient

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(u)}{1-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n,2} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \underbrace{=}_{k=n+1} 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

puis $S_2 = \zeta(3)$.

Remarque. On aurait aussi pu mener une intégration terme à terme à partir de l'expression $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt$.

II.A.1. Traité 356 fois en classe et en devoir.

II.A.2. La fonction $t \mapsto \alpha t$, définie de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$, est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = \alpha t$, qui donne $du = \alpha dt$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt$ a alors la même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (u/\alpha)^{x-1} e^{-u} du/\alpha$, si bien qu'elle existe.

De plus, elles ont la même valeur, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}.$$

II.B.1. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. La fonction $h : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0, 1[$.

Quand t tend vers 0, on voit que $h(t)$ est équivalent à $1/t^{1-x}$. L'inégalité $1-x < 1$ donne l'intégrabilité de h sur $]0, 1/2[$.

Quand t tend vers 1, on voit que $h(t)$ est équivalent à $1/(1-t)^{1-y}$. L'inégalité $1-y < 1$ donne l'intégrabilité de h sur $]1/2, 1[$.

On a alors prouvé l'existence de $\beta(x, y)$.

II.B.2. Le changement de variable $u = 1 - t$ encore et toujours.

II.B.3. Intégration par parties. On s'écarte des bornes 0 et 1 pour intégrer sur un segment.

II.B.4. Au moyen des résultats des questions précédentes, on obtient

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) \quad \text{et} \quad \beta(x, y+1) = \beta(y+1, x) = \frac{y}{x+y} \beta(y, x) = \frac{y}{x+y} \beta(x, y)$$

donc $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$.

II.C.1. Faisons l'hypothèse que la relation $(\mathcal{R})$ est démontrée pour tout $x > 1$ et tout $y > 1$.

Prenons $x > 0$ et $y > 0$. La relation II.B.4 permet alors d'écrire

$$\beta(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy} \beta(x+1, y+1) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \times \frac{\Gamma(y+1)}{y} \frac{(x+y)(x+y+1)}{\Gamma(x+y+2)}.$$

En appliquant la relation admise sur la fonction Γ , il vient

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

II.C.2. Définissons la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{u}{u+1}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

L'identité $\varphi(u) = 1 - 1/(1+u)$ montre que cette fonction est strictement croissante. Elle est également continue, avec $\varphi(0) = 0$ et elle tend vers 1 en $+\infty$. Elle établit donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

Cette bijection est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ donc on peut effectuer le changement de variable $t = \varphi(u)$.

On en tire $dt = \frac{du}{(1+u)^2}$, puis

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1} \frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du.$$

II.C.3. La fonction $F_{x,y}$ est donnée par

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad F_{x,y}(t) = \int_0^t e^{-u} u^{x+y-1} du.$$

Ceci est majoré par $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x+y-1} du$, c'est-à-dire par $\Gamma(x+y)$.

II.C.4. On définit sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ la fonction

$$H : (a, u) \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a).$$

1 Pour tout $a \geq 0$, la fonction $u \mapsto H(a, u)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2 Pour tout $u \geq 0$, la fonction $a \mapsto H(a, u)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3 Pour tout $(a, u) \in ([0, +\infty[)^2$, on observe la domination

$$|H(a, u)| \leq \Gamma(x+y) \times \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}.$$

On a alors dominé par une fonction indépendante du paramètre a , continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (l'intégrabilité découle du théorème de changement de variable à la question précédente).

Ces trois points permettent d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale : la fonction G est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

II.C.5. La fonction $F_{x,y}$ étant une primitive d'une fonction positive, elle est croissante. Ainsi, si a et b sont des éléments de $]0, +\infty[$ tels que $a \leq b$, on obtient

$$\forall u \geq 0, \quad H(a, u) \leq H(b, u),$$

ce qui donne $G(a) \leq G(b)$ par croissance de l'intégrale. La fonction G est donc croissante. En particulier, elle a une limite en $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $H_n : u \mapsto H(n, u)$ sur $]0, +\infty[$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction H_n est continue sur $]0, +\infty[$.

2 Pour tout $u \geq 0$, on remarque que $F_{x,y}((1+u)a)$ tend vers $\Gamma(x+y)$ quand a tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(H_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction

$$\ell : u \mapsto \Gamma(x+y) \times \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}.$$

Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe comme à la question précédente la domination

$$\forall u \geq 0, \quad |H_n(u)| \leq \ell(u).$$

La fonction ℓ est indépendante du paramètre n , continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} H_n(u) \, du = \int_0^{+\infty} \ell(u) \, du \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} G(n) = \Gamma(x+y) \beta(x, y).$$

La limite de la suite $(G(n))_{n \geq 0}$ est aussi la limite de la fonction G en $+\infty$ donc la fonction G admet en $+\infty$ pour limite le nombre $\Gamma(x+y) \beta(x, y)$.

II.C.6. Prenons un segment $[c, d]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

1 Pour tout $a \in [c, d]$, la fonction $u \mapsto H(a, u)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

2 Soit $u \geq 0$. La fonction $a \mapsto H(a, u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, d]$, de dérivée

$$a \mapsto \frac{\partial H}{\partial a}(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} (1+u) F'_{x,y}((1+u)a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y-1}} \times e^{-(1+u)a} ((1+u)a)^{x+y-1} = u^{x-1} e^{-(1+u)a} a^{x+y-1}.$$

3 Pour tout $a \in [c, d]$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial H}{\partial a}(a, u)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4 On observe la domination

$$\forall (a, u) \in [c, d] \times]0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial a}(a, u) \right| \leq u^{x-1} e^{-cu} \times e^{-c} \times d^{x+y-1}.$$

La fonction $u \mapsto u^{x-1} e^{-cu} \times e^{-c} \times d^{x+y-1}$ est indépendante du paramètre a , continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (on utilise II.A.1).

Le théorème de dérivation sous l'intégrale permet de conclure que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[c, d]$. C'est vrai pour tout segment $[c, d]$ inclus dans $]0, +\infty[$ donc cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

II.C.7. Le théorème de dérivation sous l'intégrale donne

$$\forall a > 0, \quad G'(a) = e^{-a} \times a^{x+y-1} \times \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-au} du = \frac{e^{-a} \Gamma(x) a^{x+y-1}}{a^x} = e^{-a} a^{y-1} \times \Gamma(x).$$

On a utilisé le calcul de la question II.A.2.

II.C.8. Prenons deux éléments c et d de $]0, +\infty[$. Le théorème fondamental de l'intégration donne

$$G(d) - G(c) = \int_c^d G'(s) ds = \Gamma(x) \int_c^d e^{-s} s^{y-1} ds.$$

La fonction G est continue en 0 et $G(0)$ est nul. On fait tendre c vers 0 puis d vers $+\infty$ et il vient

$$\Gamma(x+y)\beta(x, y) = \Gamma(x) \times \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{y-1} ds = \Gamma(x)\Gamma(y).$$

La relation $(\mathcal{R})$ est démontrée sous les hypothèses $x > 1$ et $y > 1$. Elle est donc démontrée dans le cas général d'après II.C.1.

III.A. Partons de l'identité

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On en déduit l'identité

$$\forall x > 0, \quad \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x)).$$

Par dérivation, il vient

$$\forall x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

c'est-à-dire $\psi(x+1) - \psi(x) = 1/x$.

III.B.1. Fixons $y > 0$. Les fonctions $y \mapsto \Gamma(y)$ et $y \mapsto \Gamma(x+y)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, si bien que la fonction $y \mapsto \beta(x, y)$ l'est aussi.

Cela prouve que la fonction $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ est bien définie sur $(]0, +\infty[)^2$. En dérivant dans la relation $(\mathcal{R})$, il vient

$$\forall (x, y) \in (]0, +\infty[)^2, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \Gamma(x) \times \frac{\Gamma'(y)\Gamma(x+y) - \Gamma'(x+y)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)^2} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y)).$$

III.B.2. Soient $y > 0$ et $z \geq y$. Pour tout t dans $]0, 1[$, on a alors

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geq t^{x-1}(1-t)^{z-1}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient alors $\beta(x, y) \geq \beta(x, z)$.

La fonction $y \mapsto \beta(x, y)$ est donc décroissante.

III.B.3. On en déduit que la dérivée partielle de la question III.B.1. est négative (au sens large). Le nombre $\beta(x, y)$ est strictement positif donc

$$\forall (x, y) \in (]0, +\infty[)^2, \quad \psi(y) - \psi(x+y) \leq 0.$$

Cela prouve que la fonction ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

III.C.1. Soit $x > -1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation de la question III.A donne

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = (\psi(k+1) - \psi(k)) - (\psi(x+k+1) - \psi(x+k)).$$

Un télescopage donne alors

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = (\psi(n+1) - \psi(1)) - (\psi(x+n+1) - \psi(x+1)).$$

En réarrangeant les termes, il vient la formule attendue

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

III.C.2. Partons de la majoration $x \leq p$, qui donne $n+x+1 \leq n+p+1$ puis, la fonction ψ étant croissante,

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq \psi(n+p+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} (\psi(k+1) - \psi(k)) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1}.$$

La dernière étape n'est en fait pas utile. Dans la dernière somme écrite, on majore tous les termes par le plus grand d'entre eux.

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq \psi(n+p+1) - \psi(n) \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{n} = \frac{p+1}{n}.$$

III.C.3. L'encadrement précédent montre que la différence $\psi(n+x+1) - \psi(n+1)$ tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Remarquons maintenant l'identité

$$\psi(n+x+1) - \psi(n+1) = \psi(n+x+1) - \psi(n) - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que la différence $\psi(n+x+1) - \psi(n+1)$ tend également vers 0.

Le membre de gauche de III.C.1 est indépendant de n . On en déduit que la somme partielle du membre de droite a une limite finie quand n tend vers $+\infty$ (on peut également obtenir cela en remarquant que le terme général de cette série est équivalent à x/k^2). On obtient donc

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

III.D.1. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit sur $[-1, +\infty[$ la fonction $g_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

Considérons un entier $p \geq 2$.

1 La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $[-1, +\infty[$ (question III.C.3).

2 Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[-1, +\infty[$, avec

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \forall x \in [-1, +\infty[, \quad g_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(n+x)^{k+1}}.$$

3 Soit un entier $k \in \text{seg}1, p-1 \rrbracket$. Pour tout $x \geq -1$, on observe que $|g_n^{(k)}(x)|$ est équivalent à $k!/n^{k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

L'inégalité $k+1 > 1$ montre que la série de Riemann $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{k+1}}$ converge donc la série $\sum_{n \geq 2} g_n^{(k)}(x)$ converge absolument.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} g_n^{(k)}$ converge simplement sur $[-1, +\infty[$.

4 La fonction $|g_n^{(p)}|$ est décroissante sur $[-1, +\infty[$, ce qui donne

$$\|g_n^{(p)}\|_{\infty, [-1, +\infty[} = \frac{p!}{(n-1)^{p+1}}.$$

C'est là encore le terme général d'une série convergente donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} g_n^{(p)}$ converge normalement (donc uniformément) sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

Le théorème de dérivation terme à terme permet d'en déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[-1, +\infty[$. C'est vrai pour tout entier $p \geq 2$ donc la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Ce théorème donne aussi les relations

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geq -1, \quad g^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} k! \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

On trouve donc en particulier

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! (\zeta(k+1) - 1).$$

III.D.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-1, 1[$. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x g^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

La fonction $|g^{(n+1)}|$ est décroissante sur $[-1, 1]$, ce qui donne

$$\forall t \in [-1, 1], \quad |g^{(n+1)}(t)| \leq |g^{(n+1)}(-1)| = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(j-1)^{n+2}} \leq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(j-1)^2} = (n+1)! \zeta(2).$$

Si x est dans $[0, 1[$, on obtient

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \int_0^x |g^{(n+1)}(t)| \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq (n+1)! \zeta(2) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \zeta(2) x^{n+1}.$$

Si x est dans $] -1, 0]$, on obtient

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \int_x^0 |g^{(n+1)}(t)| \frac{(t-x)^n}{n!} dt \leq (n+1)! \zeta(2) \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt = \zeta(2) (-x)^{n+1}.$$

On en déduit dans les deux cas que le reste intégral tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série de Taylor de la fonction g converge simplement sur l'intervalle $] -1, 1[$ et sa somme est la fonction g . Cela revient à dire que la fonction g est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$.

III.D.3. Pour tout x dans $] - 1, 1[$, la formule de la question III.C.3 donne

$$\psi(1+x) = \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + g(x).$$

En remarquant que $g(0)$ est nul, le développement en série entière de la fonction g s'écrit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} (\zeta(k+1) - 1) x^k.$$

Il vient donc

$$\psi(1+x) = \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} (\zeta(k+1) - 1) x^k.$$

On extrait de cette formule une somme géométrique

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} (-1) x^k = \frac{-x}{1+x}.$$

Ce terme se simplifie avec $1 - \frac{1}{1+x}$, si bien qu'il reste

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k.$$

IV.A. Fixons $x > 0$. D'après la formule de la question III.B.1 et le fait que la fonction Γ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $y \mapsto \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

En particulier, cette fonction admet une dérivée en 1, si bien que $B(x)$ est bien défini.

En dérivant la relation de III.B.1, on obtient

$$\forall y > 0, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y)) + \beta(x, y) (\psi'(y) - \psi'(x+y)).$$

On obtient en particulier

$$B(x) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, 1) (\psi(1) - \psi(x+1)) + \beta(x, 1) (\psi'(1) - \psi'(x+1)).$$

La relation (R) donne $\beta(x, 1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x}$.

La formule de la question III.B.1 donne

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, 1) = \beta(x, 1) (\psi(1) - \psi(x+1)) = \frac{1}{x} (\psi(1) - \psi(x+1)).$$

En reportant dans le calcul précédent, il vient

$$B(x) = \frac{1}{x} ((\psi(1) - \psi(x+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x+1))).$$

Le fait que Γ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ entraîne que ψ l'est aussi et on en déduit que B l'est aussi.

IV.B.1. On applique deux fois le théorème de dérivation sous l'intégrale pour exprimer $\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y)$ puis on prend $y = 1$.

IV.B.2.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad B^{(p)}(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln(t))^p t^{x-1} dt.$$

IV.B.3. On peut appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale pour montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln(t))^p t^{x-1} dt$$

est en fait continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $B^{(r-2)}$ admet en 0 la limite

$$\int_0^1 (\ln(1-t))^2 (\ln(t))^{r-2} t^{-1} dt,$$

après quoi il suffit d'appliquer la formule de I.F.2.

IV.B.4. La somme S_2 est donc la limite de $B(x)/2$ quand x tend vers 0. Utilisons la relation de la question IV.A et faisons apparaître des taux d'accroissements

$$\frac{1}{2}B(x) = \frac{\psi(x+1) - \psi(1)}{2} \times \frac{\psi(x+1) - \psi(1)}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{\psi'(x+1) - \psi'(1)}{x}.$$

En faisant tendre x vers 0, il vient

$$S_2 = 0 \times \psi'(1) - \frac{1}{2}\psi''(1) = -\frac{\psi''(1)}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \psi(1+x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ (question III.D.3). Le coefficient devant x^2 dans son développement vaut alors $\psi''(1)/2$. Ce coefficient vaut par ailleurs $(-1)^3\zeta(3)$, ce qui donne finalement $S_2 = \zeta(3)$.

IV.C.1. La fonction ψ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \psi(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, si bien que la fonction φ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Soit un entier $n \geq 2$. La formule de Leibniz permet de dériver le terme carré, ce qui donne

$$\forall x > -1, \quad \varphi'(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))\psi^{(n)}(1+x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(1+x)\psi^{(n-k)}(1+x) + \psi^{(n)}(1+x)(\psi(1+x) - \psi(1)) - \psi^{(n+1)}(1+x).$$

On évalue ceci en 0.

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1).$$

IV.C.2. Soit un entier $r \geq 3$. Pour tout $x > 0$, on observe la relation $\varphi(x) = xB(x)$. La formule de Leibniz donne

$$\forall x > 0, \quad \varphi^{(r-1)}(x) = xB^{(r-1)}(x) + (r-1)B^{(r-2)}(x).$$

En faisant tendre x vers 0, il vient alors

$$\varphi^{(r-1)}(0) = (r-1) \times (-1)^r 2(r-2)!S_r = (-1)^r (r-1)! \times 2S_r.$$

On en tire l'égalité

$$2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left(\sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} \psi^{(k)}(1)\psi^{(r-1-k)}(1) - \psi^{(r)}(1) \right).$$

Revenons au développement en série entière de la fonction $x \mapsto \psi(1+x)$ obtenu à la question III.D.3. La formule de Taylor donne

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \psi(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(1)}{n!} x^n.$$

L'unicité du développement en série entière donne donc pour tout $n \geq 1$ l'égalité $\psi^{(n)}(1) = n!(-1)^n\zeta(n+1)$. On obtient donc finalement

$$2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left(\sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} k! (-1)^k \zeta(k+1) (r-1-k)! (-1)^{r-1-k} \zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r! \zeta(r+1) \right) = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1) \zeta(r-k).$$