

Problème I — convergence d'une série au sens d'Abel

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

Dire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge au sens d'Abel signifie que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

possède une limite finie quand x tend vers 1 en restant dans $]0, 1[$. En cas d'existence, cette limite finie est appelée *somme d'Abel* de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

I.1. Dans cette partie, on étudie quelques exemples.

a. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ converge au sens d'Abel et calculer sa somme d'Abel.

b. Même question pour la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n$.

c. La série $\sum_{n \geq 0} 1$ converge-t-elle au sens d'Abel ?

d. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de ces deux suites.

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent au sens d'Abel. Prouver alors que la série $\sum c_n$ converge également au sens d'Abel et préciser sa somme d'Abel.

I.2. Dans cette partie, on prouve le *théorème d'Abel*, qui affirme que la convergence d'une série implique sa convergence au sens d'Abel.

On considère donc une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge (au sens usuel). Pour tout entier N , on pose alors

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n.$$

a. Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut au moins 1.

On peut donc définir sur l'intervalle $] -1, 1[$ la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on peut définir f en 1 aussi.

b. Pour tout x dans $] -1, 1[$, prouver la relation

$$f(x) = f(1) - (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n.$$

c. On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

d. On garde les notations ε et n_0 de la question précédente. Pour tout x dans $[0, 1[$, prouver l'inégalité

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

e. Conclure.

I.3. Dans cette partie, on prouve le *théorème de Tauber*, qui est une réciproque partielle du théorème d'Abel.

On considère une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel. Sa somme d'Abel est notée A . Pour tout x dans $] -1, 1[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Enfin, on suppose que la suite $(na_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0. Pour tout N dans $\mathbb{N}$, on pose alors

$$\mu_N = \sup \{ |na_n| ; n \geq N+1 \}.$$

a. Prouver que la suite $(\mu_N)_{N \geq 0}$ converge vers 0.

b. Soit x dans $[0, 1[$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $1 - x^k \leq k(1 - x)$.

c. Soient x dans $[0, 1[$ et N dans $\mathbb{N}$. Prouver la majoration

$$\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1-x}.$$

d. Soient x dans $[0, 1[$ et N dans $\mathbb{N}$. Prouver la majoration

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - f(x) \right| \leq (1-x) \sum_{k=1}^N |ka_k| + \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1-x}.$$

e. Prouver le théorème de Cesàro : si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe convergente, de limite ℓ , alors la suite de terme général

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$$

converge également vers ℓ .

f. Prouver que la suite de terme général $\sum_{k=0}^N a_k - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ converge vers 0.

g. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ est convergente et préciser sa somme.

Problème II — approximation par des séries divergentes

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-1} dt.$$

On va voir qu'une série divergente peut être utile pour calculer une valeur approchée de $F(x)$ pour un x donné.

II.1. Pour tout $x > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t/x} t^{-(N+1)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Il est donc possible de définir la fonction F introduite ci-dessus. On introduit également les notations suivantes

$$\begin{aligned} r_N(x) &= (-1)^N N! x^{N+1} e^{-1/x} \\ S_N(x) &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} (k-1)! x^k e^{-1/x} \\ R_N(x) &= (-1)^N N! x^N \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-(N+1)} dt. \end{aligned}$$

II.2. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

II.3. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, prouver l'égalité $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$.

II.4. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} (k-1)! x^k$ et montrer que si $x > 0$, la suite $(R_N(x))_{N \geq 1}$ n'est pas bornée.

II.5. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, prouver la majoration

$$|R_N(x)| \leq |r_N(x)|.$$

En déduire la relation $R_{N+1}(x) = \underset{x \rightarrow 0}{O}(r_N(x))$.

II.6. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que $R_N(x)$ est équivalent à $r_N(x)$ quand x tend vers 0.

II.7. Pour tout x dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$, montrer que la suite $(|r_N(x)|)_{N \geq 1}$ est décroissante jusqu'à un certain rang puis croissante.

Quand on utilise $S_N(x)$ comme valeur approchée de $F(x)$, on appelle *erreur relative* le rapport

$$E_N(x) = \left| \frac{R_N(x)}{F(x)} \right|.$$

II.8. Dans cette question, on suppose que N est pair et on pose $M = N/2$.

Pour tout x dans l'intervalle $]0, \frac{1}{N}]$, prouver les inégalités

$$S_N(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad E_N(x) \leq \frac{N! x^{N+1}}{\sum_{\ell=0}^{M-1} (1 - (2\ell+1)x) (2\ell)! x^{2\ell+1}}.$$

II.9. *Application numérique.* Vérifier que

$$E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq 3.10^{-3}.$$

« Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot *convergence*. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »

Henri POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, 1905-1910.

Problème III

Pour tout x convenable, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^{x-1} dt$.

III.1. Montrer que la fonction $\alpha : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée sur $]0, 1[$.

III.2. Pour tout $x > 0$, montrer que $F(x)$ existe.

III.3. Montrer que la fonction F a une limite nulle en $+\infty$.

III.4. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et obtenir une expression de sa dérivée.

III.5. En déduire une expression de $F(x)$ valable pour tout $x > 0$.