Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 5 — piste rouge

Problème I

I.1.a. La série entière géométrique $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Sa somme est la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$. Cette fonction a pour limite $1/2$ en 1 donc la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ converge au sens d'Abel et sa somme d'Abel vaut $1/2$.

I.1.b. La fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

est développable en série entière sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ donc ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, on obtient

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1},$$

puis

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{-x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n x^n.$$

Cette expression tend vers $-1/4$ quand x tend vers 1. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n$ converge au sens d'Abel et que sa somme d'Abel vaut $-1/4$.

I.1.c. La série entière $\sum_{n \geq 0} 1 \times x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Sa somme est la fonction $x \mapsto 1/(1-x)$. Elle admet une limite infinie en 1 à gauche donc la série $\sum_{n \geq 0} 1$ ne converge pas au sens d'Abel.

I.1.d. Le théorème du produit de Cauchy pour les séries entières nous apprend que le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ vaut au moins le minimum des rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Il vaut donc au moins 1.

De plus, pour tout x dans $] -1, 1[$, ce théorème donne l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$$

Notons A et B les sommes d'Abel respectives des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$. On observe que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ tend vers $A \times B$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge au sens d'Abel et que sa somme d'Abel vaut $A \times B$.

I.2.a. La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En particulier, cette suite est bornée.

Rappelons que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des $\rho \geq 0$ pour lesquels la suite $(a_n \rho^n)_{n \geq 0}$ est bornée. On vient de voir que 1 est un élément de cet ensemble. Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc au moins 1.

I.2.b. La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (c'est la suite des restes d'une série convergente) donc elle est bornée. Par le même raisonnement que précédemment, la série entière $\sum R_n x^n$ a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En particulier, cette série entière converge simplement sur l'intervalle ouvert $] -1, 1[$.

Soit x dans $] -1, 1[$. On trouve

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^{n+1}}_{k=n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} R_{k-1} x^k = R_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (R_k - R_{k-1}) x^k.$$

Observons maintenant les égalités

$$R_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = f(1) - a_0$$

et, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$R_k - R_{k-1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i - \sum_{i=k}^{+\infty} a_i = -a_k.$$

Il reste donc

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n = f(1) - a_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = f(1) - f(x).$$

I.2.c. C'est ni plus ni moins la définition de l'énoncé « la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ». C'est là une propriété connue de la suite des restes d'une série convergente.

I.2.d. Prenons x dans $[0, 1[$. Partons de la formule de la question 2.b et séparons la somme en deux.

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} R_n x^n + (1-x) \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n x^n.$$

Appliquons maintenant l'inégalité triangulaire, en utilisant le fait que x et $1-x$ sont positifs,

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n + (1-x) \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |R_n| x^n.$$

Pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, on utilise la majoration de la question 2.c, pour obtenir

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |R_n| x^n \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} x^n = \frac{\varepsilon}{2} \frac{x^{n_0+1}}{1-x} \leq \frac{\varepsilon}{2(1-x)}.$$

En reportant dans l'inégalité précédente, on obtient, comme souhaité, la majoration

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

I.2.e. On observe que $(1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n$ tend vers 0 quand x tend vers 1. Il existe donc x_0 dans $]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad \left| (1-x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc

$$\forall x \in [x_0, 1[, \quad |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

Plus précisément, on a prouvé ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in]0, 1[, \quad \forall x \in [x_0, 1[, \quad |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

En somme, on a prouvé que $f(x)$ tend vers $f(1)$ quand x tend vers 1 à gauche — cela signifie que la fonction f est automatiquement continue en 1, mais ce n'est pas ce qui nous occupe ici. Tout ceci prouve que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge au sens d'Abel et que sa somme vaut $f(1)$.

I.3.a. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(na_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 donc il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |na_n| \leq \varepsilon.$$

Prenons un entier $N \geq n_0$. Pour tout entier $n \geq N + 1$, l'inégalité $n \geq n_0$ a lieu, donc $|na_n| \leq \varepsilon$. On en déduit la majoration $\mu_N \leq \varepsilon$. On connaît par ailleurs la minoration $\mu_N \geq 0$.

On a alors prouvé ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall N \geq n_0, \quad 0 \leq \mu_N \leq \varepsilon.$$

On a donc prouvé que la suite $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

I.3.b. Soit k dans $\mathbb{N}$. On connaît la factorisation

$$1 - x^k = (1 - x) \sum_{i=0}^{k-1} x^i.$$

Le fait que x soit dans $[0, 1[$ donne les inégalités

$$1 - x \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{k-1} x^i \leq \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k$$

donc $1 - x^k \leq k(1 - x)$.

Notons qu'il est possible également d'obtenir cette majoration par l'inégalité des accroissements finis. C'est certes inutilement compliqué mais ça présente l'avantage de se généraliser au cas où k n'est pas un entier.

I.3.c. On commence par appliquer l'inégalité triangulaire (c'est possible car la série converge absolument) puis on écrit $a_k = ka_k/k$. Ensuite, on majore $1/k$ par $1/N$ et $|ka_k|$ par μ_N . On obtient

$$\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} |ka_k| \times x^k \times \frac{1}{k} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{\mu_N}{N} x^k = \frac{\mu_N}{N} \frac{x^{N+1}}{1-x} \leq \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1-x}.$$

I.3.d. On commence par effectuer un découpage

$$\sum_{k=0}^N a_k - f(x) = \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^N a_k x^k - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^N a_k (1 - x^k) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

Ensuite, on applique l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - f(x) \right| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| \times (1 - x^k) + \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k \right|.$$

Il n'y a plus qu'à utiliser les inégalités des deux questions précédentes

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - f(x) \right| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| \times k(1-x) + \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1-x}.$$

I.3.e. Voilà une question bien difficile, surtout en l'absence de toute indication. La démarche est voisine de celle de la partie I.2. On fixe $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall k \geq n_0, \quad |z_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons un entier $n \geq n_0 + 1$. Appliquons l'inégalité triangulaire

$$|m_n - \ell| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (z_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - \ell|.$$

On sépare la somme en deux parties pour exploiter la condition sur l'entier n_0 .

$$|m_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |z_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n |z_k - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |z_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n_0} |z_k - \ell|}_{\text{noté } \sigma} - \frac{n_0 \varepsilon}{2} \right).$$

La quantité notée σ est indépendante de n . On peut donc affirmer que σ/n tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier $n_1 \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad \frac{\sigma}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq n_1$, on obtient alors $|m_n - \ell| \leq \varepsilon$. Plus précisément, on a prouvé ceci

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq n_1, \quad |m_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On a donc prouvé que la suite $(m_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .

I.3.f. Prenons N dans $\mathbb{N}^*$ et appliquons la majoration de la question précédente pour le choix $x = 1 - 1/N$. On obtient

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - f\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |ka_k| + \mu_N.$$

On a vu en 3.a que μ_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. De plus, le théorème de Cesàro permet d'affirmer que $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |ka_k|$ tend vers 0 également. D'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^N a_k - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

converge vers 0.

I.3.g. Par hypothèse, on sait que $f(x)$ tend vers A quand x tend vers 1 en restant dans $]0, 1[$.

Pour tout entier $N \geq 2$, le nombre $1 - 1/N$ est dans $]0, 1[$ donc, par caractérisation séquentielle de la limite, on peut affirmer que $f(1 - 1/N)$ tend vers A quand l'entier N tend vers $+\infty$.

Le résultat de la question précédente permet de conclure que $\sum_{k=0}^N a_k$ tend vers A quand l'entier N tend vers $+\infty$. Autrement dit, la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ est convergente (au sens usuel) et sa somme vaut A .

Problème II (origine : X-ENS MP 2015)

II.1. Soit $x > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto e^{-t/x} t^{-(N+1)}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On observe que $t^2 f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ (croissances comparées), ce qui donne $f(t) = o(1/t^2)$.

On sait que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que la fonction f est également intégrable sur $[1, +\infty[$.

Autre méthode. On peut négliger $f(t)$ devant $e^{-t/(2x)}$.

II.2. On peut avoir la tentation d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale, mais on doit vite se rendre compte que les expressions des dérivées successives sont atroces. La bonne méthode consiste à se débarrasser du x dans l'intégrande.

La fonction $t \mapsto t/x$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1/x, +\infty[$, qui est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = t/x$.

Celui-ci donne $du/u = dt/t$ puis

$$F(x) = \int_{1/x}^1 \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{1/x}^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}_{=F(1)}.$$

La fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u}/u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Elle admet pour primitive sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$\Phi : s \mapsto \int_1^s \frac{e^{-u}}{u} du.$$

La fonction Φ est alors également de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'identité

$$\forall x > 0, \quad F(x) = F(1) - \Phi(1/x)$$

justifie que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Remarque. Cette propriété ne sert à rien dans la suite du problème. Cette question semble avoir été posée ici pour faire perdre du temps aux candidats et aux candidates.

II.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$.

Fixons provisoirement $a > 1$ et effectuons une intégration par parties dans l'intégrale $\int_1^a e^{-t/x} t^{-k} dt$.

On dérive la fonction $t \mapsto t^{-k}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, en $t \mapsto -kt^{-k-1}$.

On primitive la fonction $t \mapsto e^{-t/x}$ en $t \mapsto -xe^{-t/x}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient

$$\int_1^a e^{-t/x} t^{-k} dt = -xe^{-a/x} a^{-k} + xe^{-1/x} - kx \int_1^a e^{-t/x} t^{-k-1} dt.$$

On fait tendre a vers $+\infty$, ce qui donne

$$\int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-k} dt = xe^{-1/x} - kx \int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-k-1} dt.$$

On multiplie ensuite par $(-1)^{k-1} (k-1)! x^{k-1}$, ce qui donne

$$R_{k-1}(x) = r_{k-1}(x) + R_k(x).$$

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}^*$. Un télescopage donne alors

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N r_{k-1}(x) = \sum_{k=1}^N (R_{k-1}(x) - R_k(x)) = R_0(x) - R_N(x) = F(x) - R_N(x),$$

c'est-à-dire $F(x) = S_N(x) + R_N(x)$.

II.4. Rappelons que pour tout $x > 0$, le quotient $x^k/k!$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. On en déduit que le quotient $k!/x^k$ tend vers $+\infty$.

Ainsi, pour tout $y > 0$, le produit $(k-1)!y^{k-1}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et il en va de même pour $(k-1)!y^k$.

Plus généralement, pour tout y réel non nul, la valeur absolue de $(-1)^{k-1} (k-1)!y^k$ tend vers $+\infty$ donc la série ayant ce terme général diverge grossièrement.

Rappelons également que toute série entière converge en 0, si bien que le domaine de convergence de la série entière étudiée est $\{0\}$.

Prenons $x > 0$. Une minoration directe donne

$$\int_1^{+\infty} e^{-t/x} t^{-(N+1)} dt \geq \int_1^2 e^{-t/x} t^{-(N+1)} dt \geq \int_1^2 e^{-2/x} 2^{-(N+1)} dt = e^{-2/x} 2^{-(N+1)}$$

puis $|R_N(x)| \geq N! (x/2)^N \times e^{-2/x}/2$.

Comme expliqué précédemment, ce minorant tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$, donc la suite $(R_N(x))_{N \geq 1}$ n'est pas bornée.

II.5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$. Pour tout $t \geq 1$, on observe la majoration $t^{-N-1} \leq 1$, qui donne

$$|R_N(x)| \leq N! x^N \int_1^{+\infty} e^{-t/x} dt = N! x^N \times x e^{-1/x} = |r_N(x)|.$$

On en tire la domination

$$\left| \frac{R_{N+1}(x)}{r_N(x)} \right| \leq \left| \frac{r_{N+1}(x)}{r_N(x)} \right| = N \times x.$$

Par le théorème des gendarmes, le quotient $R_{N+1}(x)/r_N(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, ce qui s'écrit $R_{N+1}(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(r_N(x))$.

II.6. L'intégration par parties de la question II.3 donne $R_N(x) = r_N(x) + R_{N+1}(x)$. La relation de la question précédente donne donc

$$R_N(x) = r_N(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(r_N(x)),$$

ce qui signifie que $R_N(x)$ est équivalent à $r_N(x)$ quand x tend vers 0.

II.7. Soit x dans l'intervalle $]0, 1/2[$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a déjà vu la relation

$$\left| \frac{r_{N+1}(x)}{r_N(x)} \right| = N \times x.$$

Ce quotient est majoré par 1 pour tout entier $N \leq 1/x$ (ce qui va au moins jusqu'à 2) puis minoré par 1 pour tout entier $N > 1/x$.

Notons $n_x = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. La suite $(|r_N(x)|)_{1 \leq N \leq n_x+1}$ est alors décroissante et la suite $(|r_N(x)|)_{N \geq n_x+1}$ est croissante.

II.8. Soit x dans l'intervalle $]0, 1/N]$. L'encadrement $0 < x \leq 1/N$ donne $1/x \geq N$ puis $n_x \geq N$, si bien que la suite finie $(|r_k(x)|)_{1 \leq k \leq N}$ est décroissante.

La séparation des indices pairs et impairs donne

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{2M} r_{k-1}(x) = \sum_{\ell=0}^{2M-1} r_\ell(x) = \sum_{i=0}^{M-1} (r_{2i}(x) + r_{2i+1}(x)).$$

Pour chaque indice i dans $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$, on trouve en outre

$$r_{2i}(x) + r_{2i+1}(x) = |r_{2i}(x)| - |r_{2i+1}(x)| \geq 0,$$

donc $S_N(x) \geq 0$.

Le fait que N soit pair donne $R_N(x) \geq 0$ puis $F(x) \geq S_N(x)$. En raffinant un peu les raisonnements ci-dessus, on voit que $S_N(x)$ est en fait strictement positif, ce qui permet d'écrire

$$E_N(x) = \frac{R_N(x)}{F(x)} \leq \frac{R_N(x)}{S_N(x)} \leq \frac{|r_N(x)|}{S_N(x)}.$$

En remaniant le calcul ci-dessus, il vient

$$S_N(x) = e^{-1/x} \sum_{i=0}^{M-1} ((2i)! x^{2i+1} - (2i+1)! x^{2i+2}) = e^{-1/x} \sum_{i=0}^{M-1} (2i)! x^{2i+1} (1 - (2i+1)x).$$

En simplifiant par $e^{-1/x}$, on obtient la majoration demandée

$$E_N(x) \leq \frac{N! x^{N+1}}{\sum_{i=0}^{M-1} (1 - (2i+1)x) (2i)! x^{2i+1}}.$$

II.9. Dans cette question, on prend $N = 4$ et $x = 1/10$, ce qui est cohérent avec l'hypothèse $0 < x \leq 1/N$ et avec l'hypothèse que N soit pair.

Dans la fraction de la question précédente, le numérateur vaut

$$4! \times \frac{1}{10^5} = 24 \times 10^{-5}$$

et le dénominateur vaut

$$\sum_{\ell=0}^1 \left(1 - \frac{2\ell+1}{10}\right) (2\ell)! \frac{1}{10^{2\ell+1}} = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times 0! \times \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times 2! \times \frac{1}{1000} = \frac{914}{10000} \geq 8 \times 10^{-2}.$$

On en déduit la majoration $E_4 \left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{24 \times 10^{-5}}{8 \times 10^{-2}} = 3 \times 10^{-3}$.

Problème III

III.1. La fonction α est continue sur $]0, 1[$. Elle admet les limites 0 et 1 respectivement en 0 et en 1. Elle est donc prolongeable par continuité sur le segment $[0, 1]$. Ce prolongement est lui-même bornée donc la fonction α est bornée.

III.2. Définissons la fonction $f : (x, t) \mapsto \alpha(t)t^{x-1}$ sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$.

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, 1[$. Le résultat de III.1 donne

$$\forall t \in]0, 1[, \quad |f(x, t)| \leq \|\alpha\|_\infty \times \frac{1}{t^{1-x}}.$$

L'hypothèse $x > 0$ donne $1 - x < 1$. La fonction $t \mapsto 1/t^{1-x}$ est donc intégrable sur $]0, 1[$. On en déduit que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$.

En particulier, le nombre $F(x)$ est bien défini.

III.3. Soit $x > 0$. La majoration précédente donne

$$|F(x)| \leq \|\alpha\|_\infty \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{\|\alpha\|_\infty}{x}.$$

Ce majorant montre que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

III.4. [1] Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$.

[2] Soit $t \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto f(x, t)$ s'écrit $t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)} e^{(x-1)\ln(t)}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^{x-1}.$$

[3] Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, 1[$.

[4] Fixons $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ et tout t dans $]0, 1[$, on observe la domination

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^{x-1} \leq t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}.$$

La fonction $t \mapsto 1/t^{1-a}$ est indépendante du paramètre x , continue et intégrable sur $]0, 1[$ (intégrale de référence).

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. C'est vrai pour tout $x > 0$ donc la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 (t^x - t^{x-1}) dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

III.5. Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + c.$$

Cette expression se réécrit $F(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + c$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c = 0$. Donc finalement

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \ln(x+1) - \ln(x).$$