Dénombrement

Exercice 1. (**) Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

2. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E telles que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

3. Dénombrer les partitions de E en deux sous-ensembles.

4. Plus généralement, exprimer le nombre de partitions de E en p sous-ensembles en fonction de $\mathrm{S}(n, p)$, qui est le nombre de surjections de E vers $[\![1, p]\!]$ (on ne cherchera pas à exprimer $\mathrm{S}(n, p)$).

Exercice 2. (*) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On introduit sa factorisation en produit de facteurs premiers

$$n = \prod_{k=1}^{s} (p_k)^{m_k}.$$

Exprimer le nombre de diviseurs de n en fonction des m_k.

Exercice 3. (**) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $\mathbb{N}$.

On note E l'ensemble des p-uplets croissants d'éléments de $[\![0, n]\!]$ et F l'ensemble des p-uplets strictement croissants d'éléments de $[\![1, n+p]\!]$.

a. Montrer que l'application

$$\varphi : (a_1, \ldots, a_p) \mapsto (a_1 + 1, a_2 + 2, \ldots, a_p + p)$$

est une bijection de E sur F.

b. En déduire le cardinal de l'ensemble E.

c. On note G l'ensemble des $(p+1)$-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut n. Trouver une bijection entre G et E.

Exercice 4. (**) Dénombrer les surjections d'un ensemble de cardinal $(n+1)$ sur un ensemble de cardinal n.

Pour cela, on commencera par remarquer que pour une telle application, il y a exactement un élément de l'ensemble de l'arrivée qui possède exactement deux antécédents.

Exercice 5. Nombre de surjections. (**) Pour tout couple $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathrm{S}(n, p)$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, p]\!]$.

Par convention, on pose $\mathrm{S}(n, 0) = 0$ et $\mathrm{S}(0, n) = 0$ si $n \geqslant 1$; on pose également $\mathrm{S}(0, 0) = 1$.

On peut observer que $\mathrm{S}(n, p)$ est nul si $p > n$ et qu'il vaut $n!$ si $p = n$.

Le but de cet exercice est d'obtenir la formule générale suivante

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{S}(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

a. En partitionnant l'ensemble des applications de E_n vers E_p selon le cardinal de leur image, prouver la relation

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{S}(n, k).$$

b. Conclure.

Exercice 6. (**) Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

Probabilités sur un univers fini

Exercice 7. (*) On lance n fois une pièce.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les événements $\mathrm{P}_k =$ [On a fait `pile` au k-ième lancer.] et $\mathrm{F}_k =$ [On a fait `face` au k-ième lancer.]. Exprimer à l'aide des événements de la forme P_k et F_k les événements suivants :

A = [On a fait `pile` à tous les lancers.] ;
B = [On a fait `pile` à au moins un lancer.] ;
C = [On a fait `pile` à au moins un lancer, mais pas au cours des deux premiers.] ;
D = [On a fait `pile` pour la première fois à l'avant-dernier lancer.] ;
E = [On n'a jamais obtenu la succession `(pile, face)`.] ;
F = [On a fait `pile` exactement une fois.] ;
G = [On a fait `pile` exactement deux fois.].

Exercice 8. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$.

Exercice 9. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{k/n} - 1\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n dont la loi est donnée par

$$\mathrm{X}_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}, \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!],\quad \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{k/n} - 1}{\alpha_n}.$$

a. Trouver un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.

b. On note F_n la fonction de répartition de X_n. Exprimer $\mathrm{F}_n(x)$ pour tout x réel.

c. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{F}_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue, à exprimer explicitement.

d. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 10. (*) On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2, supposées indépendantes.

On pose $\mathrm{X} = \min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ et $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$.

a. Déterminer la loi et l'espérance de X.

b. Calculer $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.

c. Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y).

Exercice 11. (**) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_k$ indépendantes, de loi uniforme sur l'ensemble $\{-1; 1\}$. On note

$$\mathrm{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(\lambda) = \ln\left(\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{U}_1})\right)$.

a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, prouver l'inégalité $\varphi(\lambda) \leqslant \lambda^2/2$.

b. (***) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$, prouver l'inégalité $\mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.

c. En déduire l'inégalité de Hoeffding

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_k \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

Exercice 12. (*) On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement ≪ *Le n-ième lancer a donné pile.* ≫ et on note F_n son événement contraire.

Pour tout entier n, on note D_n l'événement ≪ *Lors des n premiers lancers, il n'y a pas eu deux lancers consécutifs qui aient donné pile.* ≫ La probabilité de l'événement D_n est notée d_n.

a. Calculer d_0, ainsi que d_1 et d_2.

b. Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n.$$

c. En déduire une expression de d_n en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 13. (*) On se place dans le même contexte que l'exercice précédent. Albertine et Barnabé jouent à un jeu basé sur l'observation des résultats des lancers de la pièce. Albertine gagne si une succession `(pile, pile, face)` apparaît avant qu'une succession `(face, pile, pile)` n'apparaisse. Barnabé gagne si une succession `(face, pile, pile)` apparaît avant qu'une succession `(pile, pile, face)` n'apparaisse. Si aucune de ces successions ne se produit, aucun des deux ne gagne.

Le but de cet exercice est de déterminer lequel des deux personnages a le plus de chances de gagner.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note N_n l'événement ≪ *Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue des n premiers lancers.* ≫

Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{N}_1)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{N}_2)$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 3$, prouver l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{N}_n) = 2^{-n} + d_n$.

c. En déduire que la probabilité d'un match nul est nulle.

d. Calculer la probabilité de victoire d'Albertine. En déduire celle de Barnabé. Commenter.

Exercice 14. (*) Montrer qu'en posant $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la loi d'une variable aléatoire discrète X. Possède-t-elle une espérance ?

Exercice 15. (*) a. Montrer l'existence d'une constante c telle qu'on définisse la loi d'une variable aléatoire discrète X en posant $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \dfrac{c}{k^3 + 1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que X possède une espérance, mais pas de variance.

Exercice 16. (*) Montrer que si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors la valeur maximale de $\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)$ est atteinte pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Exercice 17. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(1/(\mathrm{X}+1))$ et calculer sa valeur.

Exercice 18. (*) Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(1/\mathrm{X})$ et calculer sa valeur.

Exercice 19. (**) Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Z sachant $[\mathrm{X} = k]$ soit uniforme sur $[\![0, k-1]\!]$.

a. Donner $\mathbb{P}_{[\mathrm{X}=k]}(\mathrm{Z} = j)$ pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

b. Déterminer la loi de Z (sans chercher à simplifier les sommes obtenues).

c. (***) Prouver l'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ et calculer sa valeur.

Exercice 20. (*) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note Z le maximum des nombres X et Y.

a. Justifier que Z est une variable aléatoire. Déterminer sa loi et son espérance.

b. Déterminer les lois de $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{D} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

Exercice 21. (**) Soit p dans $]0, 1[$. Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction génératrice de S_n. En déduire sa loi.

b. Déterminer la loi de T_1 sachant $[\mathrm{S}_2 = k]$. Interprétation.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer l'espérance de $\dfrac{n-1}{\mathrm{S}_n - 1}$.

Exercice 22. (*) On considère deux variables X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

a. Montrer que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[\mathrm{X} + \mathrm{Y} = n]$. Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 23. (*) On considère deux variables aléatoires X et Z. On suppose que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel n la loi de X sachant $[\mathrm{Z} = n]$ est $\mathcal{B}(n, p)$.

Montrer que X suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

Exercice 24. (**) Soient a et b dans $]0, +\infty[$ avec $a + b = 1$.

a. Montrer que la série $\sum \dbinom{2n}{n} a^n b^n$ converge sauf si $(a, b) = (1/2, 1/2)$.

On se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe. On est initialement en 0. À un instant donné, la probabilité d'aller à droite vaut a et la probabilité d'aller à gauche vaut b. On note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n. On note p_n la probabilité d'être de retour en 0 pour la première fois à l'instant n.

On pose $\mathrm{R}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $\mathrm{P}(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.

b. Montrer que les fonctions R et P sont définies sur $]-1, 1[$.

c. Pour tout $t \in]-1, 1[$, justifier l'égalité $\mathrm{R}(t) = 1 + \mathrm{R}(t)\mathrm{P}(t)$.

d. On note A l'événement « On revient au moins une fois en 0. ». Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ vaut 1 si, et seulement si, on est dans le cas $(a, b) = (1/2, 1/2)$.

Exercice 25. (*) Soit X une variable aléatoire strictement positive. prouver l'inégalité $\mathbb{E}\left(\mathrm{X} + \dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) \geqslant 2$.

Exercice 26. (**) Soient X et Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes, de même loi.

Prouver l'inégalité $\mathbb{E}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) \geqslant 1$.

Exercice 27. (***) Soient X_0 et Y_0 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$.

On suppose que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ suit la même loi que $\mathrm{X}_0 + \mathrm{Y}_0$. Montrer que X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
