Régularité des fonctions

Exercice 1. **(*)** On pose $f(x,y)=0$ si $y=0$ et $f(x,y)=y+x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$ sinon.

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ et $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ existent mais pas $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

Exercice 2. **(*)** On pose $f(x,y)=(x^2-y^2)\ln(x^2+y^2)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $f(0,0)=0$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3. **(*)** On pose $f(x,y)=\dfrac{x^4y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4. **(**)** Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $q(x,y)=\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

a. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, simplifier l'expression $1-q(x,y)^2$.

b. En déduire que la fonction $f:(x,y)\mapsto \mathrm{Arccos}(q(x,y))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Sur un ensemble $\mathcal{D}$ à préciser, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f.

d. En déduire une simplification de l'expression $f(x,y)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. **(**)** On considère la fonction dét, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, interprétée comme une fonction de n^2 variables.

a. Déterminer la différentielle de cette fonction en I_n.

b. Déterminer la différentielle de cette fonction en une matrice A quelconque.

Extremums

Exercice 6. **(*)** On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $f:(x,y)\mapsto xy(1-x-y)$.

a. Représenter l'ensemble $\mathrm{D}=\{(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2\ ;\ 1-x-y\geqslant 0\}$.

b. Montrer que f admet sur D un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 7. **(*)** Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f:(x,y)\mapsto(x^2-y^2)\exp(-x^2-y^2)$.

Exercice 8. **(*)** Déterminer les extremums sur $[0,\pi]^2$ de la fonction $f:(x,y)\mapsto\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)$.

Exercice 9. **(*)** Trouver les extremums de la fonction $f:(x,y)\mapsto(x-y)^2-xy$ sur l'ensemble D défini par

$$\mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}.$$

Exercice 10. **(**)** On définit sur $[0,+\infty[^2$ une fonction f en posant $f(0,0)=0$ et

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}\quad\text{si}\quad(x,y)\neq(0,0).$$

a. Montrer que cette fonction est continue.

b. Trouver les points critiques de f dans l'ouvert $(]0,+\infty[)^2$.

c. Pour tout $(x,y)\in([0,+\infty[)^2$ tel que $x+y\geqslant 8$, montrer la majoration $f(x,y)<1/8$.

d. Déterminer les extremums de la fonction f sur $([0,+\infty[)^2$.

Exercice 11. (*) On pose $\mathrm{D} = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ et on définit $f : (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2}\cos(y)$ sur D.

a. Déterminer les points critiques de f sur une région Δ à préciser.

b. Pour tout $(x, y) \in \mathrm{D}$, prouver la minoration $f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leqslant x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4$.

c. Étudier les extremums de f sur D.

Exercice 12. (**) Dans cet exercice, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On se donne une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur B de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction

$$f : \mathrm{X} \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} - \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X}$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

a. Exprimer le gradient de f.

b. Si A est symétrique définie positive, montrer que f possède un minimum et qu'il est atteint en un unique point.

c. (***) Montrer que f possède un minimum si et seulement si la matrice A est symétrique positive et B est dans l'image de A.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 13. (**) On note Ω le complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On fixe α dans $\mathbb{R}$.

Dire que la fonction f est *positivement homogène* de degré α signifie qu'elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \qquad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Exercice 14. (**) Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

à l'aide du changement de variables $(u, v) = (xy, x/y)$.

Exercice 15. (**) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ telles que la fonction $\hat{f} : (x, y, z) \mapsto f\left(\dfrac{x}{y + z}\right)$ soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul) sur $]0, +\infty[^3$.

Exercice 16. (**) On note U l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, et on définit sur U la fonction

$$\mathrm{F} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

a. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, exprimer la fonction $\partial^2\mathrm{F}/\partial x_i^2$.

b. En déduire une expression du laplacien de F, défini par $\Delta\mathrm{F} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial x_i^2}$.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que la fonction F soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul).
