Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 6 — piste bleue

Sujet d'origine : Centrale TSI 2014, maths 2

I.A.1. La matrice demandée s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.A.2. La matrice M possède une ligne nulle donc son déterminant est nul.

I.A.3. Le rang de M est la dimension de l'espace engendré par ses lignes. L'une des lignes est nulle donc le rang de M est majoré par 5.

I.A.4. L'image de f contient les vecteurs $f(\vec{e}_i)$ pour i variant dans $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, c'est-à-dire les vecteurs $\vec{e}_i$ pour i variant dans cet ensemble. L'image de f contient donc le sous-espace de $\mathbb{R}^6$ engendré par ces cinq vecteurs, c'est-à-dire E_5 .

I.A.5. Soit $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. L'espace E_k est engendré par une famille de cinq vecteurs extraite de la base canonique. Une telle famille est donc libre, si bien que c'est une base de E_k . L'espace E_k est donc de dimension 5.

I.A.6. La question I.A.3 donne $\text{rg}(M) \leq 5$ donc $\text{rg}(f) \leq 5$.
 Les questions I.A.4 et I.A.5 donnent $\text{rg}(f) \geq \dim(E_5) = 5$. On en déduit que le rang de f vaut 5.
 L'inclusion $E_5 \subset \text{Im}(f)$ et l'égalité des dimensions donnent l'égalité $\text{Im}(f) = E_5$.

I.B. L'égalité $f(\vec{e}_5) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_6$ se réécrit

$$f(\vec{e}_5) = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_6) \quad \text{puis} \quad f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_5 + \vec{e}_6) = 0.$$

Le vecteur $\vec{u} = (1, -1, 0, 0, -1, 1)$ est donc un élément (non nul) du noyau de f .

La formule du rang donne $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^6) - \text{rg}(f) = 6 - 5 = 1$ donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\text{Ker}(f)$.

I.C.1. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\chi_M(t) = \det(tI_6 - M) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se restructure sous forme triangulaire par blocs comme suit

$$\chi_M(t) = \begin{vmatrix} (t-1)I_4 & * \\ 0 & N(t) \end{vmatrix} \quad \text{en posant} \quad N(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'égalité $\chi_M(t) = \det((t-1)I_4) \det(N(t)) = (t-1)^4 \times t(t-1) = (t-1)^5 t$.

I.C.2. Ainsi, les valeurs propres de M sont 0 et 1, avec pour ordres de multiplicité 1 et 5 respectivement.

I.C.3. L'espace propre de f pour la valeur propre 0 est $\text{Ker}(f)$, qui est de dimension 1.

L'espace propre de f pour la valeur propre 1 est $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

On observe que les vecteurs $\vec{e}_k$, pour k variant dans $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, sont des éléments de $\text{Ker}(f - \text{Id})$, ce qui donne l'inclusion $E_5 \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$.

On sait que la somme des dimensions des espaces propres de f ne peut dépasser $\dim(\mathbb{R}^6)$, c'est-à-dire 6. Par conséquent, la dimension de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ ne peut pas dépasser 5. On en déduit que cette dimension vaut 5.

L'inclusion $E_5 \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$, combinée à l'égalité des dimensions, donne l'égalité $\text{Ker}(f - \text{Id}) = E_5$.

I.C.4. La somme des dimensions des espaces propres de f vaut 6, c'est-à-dire $\dim(\mathbb{R}^6)$. On en déduit que f est diagonalisable.

En concaténant des bases des deux espaces propres, on obtient une base de diagonalisation pour f . On choisit par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.D.1. La diagonalisabilité de f se réécrit

$$\mathbb{R}^6 = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f),$$

ce qui signifie que f est une projection. On projette sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$, c'est-à-dire sur E_5 , parallèlement à $\text{Ker}(f)$, c'est-à-dire $\text{Vect}(\vec{u})$.

I.D.2. Le produit scalaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{u}$ vaut 1, ce qui est non nul. Les sous-espaces E_5 et $\text{Vect}(\vec{u})$ ne sont donc pas orthogonaux.

Le projecteur f n'est pas un projecteur orthogonal.

I.D.3. Le fait que f soit un projecteur donne l'égalité $f^2 = f$ puis $M^2 = M$.

I.E.1. Le vecteur $\vec{b}$ est dans E_5 donc c'est un point fixe de f , ce qui s'écrit $f(\vec{b}) = \vec{b}$.

I.E.2. On observe les équivalences

$$f(\vec{x}) = \vec{b} \iff f(\vec{x}) = f(\vec{b}) \iff f(\vec{x} - \vec{b}) = 0 \iff \vec{x} - \vec{b} \in \text{Ker}(f) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{x} - \vec{b} = \lambda \vec{u}.$$

Les solutions sont donc exactement les vecteurs de la forme $\vec{b} + \lambda \vec{u}$, où λ décrit $\mathbb{R}$.

I.E.3. Le calcul donne

$$\vec{c} - \vec{b} = (-3, 3, 0, 0, 3, -3) = -3\vec{u},$$

si bien que $\vec{c}$ est une solution de l'équation. Par ailleurs, c'est un vecteur différent de $\vec{b}$ à coefficients positifs ayant un coefficient nul.

Réciproquement, soit $\vec{x}$ une solution de l'équation autre que $\vec{b}$ ayant un coefficient nul et les autres coefficients positifs. On sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{u}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \vec{x} = (4 + \lambda, 4 - \lambda, 4, 1, -\lambda, 3 + \lambda)$$

Les hypothèses imposent les conditions suivantes à λ

$$\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \lambda \in \{-4, 4, 0, -3\} \\ \lambda \geq -4, \quad \lambda \leq 4, \quad \lambda \leq 0, \quad \lambda \geq -3. \end{cases}$$

Le seul choix convenable est $\lambda = -3$, ce qui prouve l'unicité de $\vec{c}$.

Remarque. Cet énoncé considère tacitement que les éléments de $\mathbb{R}^6$ sont aussi des éléments de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Je trouve ça désagréable mais tant pis.

Il est également tacitement supposé que A est un élément de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$.

II.A.1. On prend pour hypothèse l'égalité ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

Soit $Z \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Le produit scalaire sur $A \cdot Z$ avec $A \cdot X - Y_0$ s'écrit

$${}^t(A \cdot Z) \cdot (A \cdot X - Y_0) = {}^tZ \cdot ({}^tA \cdot A \cdot X - {}^tA \cdot Y_0) = 0.$$

Le vecteur $A \cdot X - Y_0$ est donc orthogonal à tous les vecteurs de $\text{Im}(A)$.

Réciproquement, on suppose que $A \cdot X - Y_0$ est orthogonal à tous les vecteurs de la forme $A \cdot Z$. Cela s'écrit

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t(A \cdot Z) \cdot (A \cdot X - Y_0) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad {}^tZ \cdot ({}^tA \cdot A \cdot X - {}^tA \cdot Y_0) = 0.$$

Le vecteur ${}^tA \cdot A \cdot X - {}^tA \cdot Y_0$ est donc orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Il est en particulier orthogonal à lui-même, si bien qu'il est nul, ce qui donne l'égalité ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

L'équivalence demandée est prouvée.

II.A.2. On prend pour hypothèse l'égalité ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

D'après II.A.1, la différence $A \cdot X - Y_0$ est un élément de $(\text{Im}(A))^\perp$. On a donc la décomposition

$$Y_0 = \underbrace{(Y_0 - A \cdot X)}_{\in (\text{Im}(A))^\perp} + \underbrace{A \cdot X}_{\in \text{Im}(A)}.$$

Le vecteur $A \cdot X$ est donc le projeté orthogonal de Y_0 sur $\text{Im}(A)$.

Réciproquement, on suppose que $A \cdot X$ est le projeté orthogonal de Y_0 sur $\text{Im}(A)$. On en déduit alors que $Y_0 - A \cdot X$ est un élément de $(\text{Im}(A))^\perp$, si bien que ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$ d'après II.A.1.

On a prouvé l'équivalence demandée.

II.A.3. Notons Y_1 le projeté orthogonal de Y_0 sur $\text{Im}(A)$.

C'est un élément de $\text{Im}(A)$ donc il existe un vecteur X_1 de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y_1 = A \cdot X_1$.

Un tel vecteur X_1 est alors une solution de l'équation ${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0$.

II.B.1. Le calcul donne ${}^tB = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tA \cdot A = B$. La matrice B est symétrique.

II.B.2. On connaît la relation $B \cdot X = \lambda X$ donc

$${}^tX \cdot B \cdot X = \lambda {}^tX \cdot X = \lambda \|X\|^2.$$

Un autre calcul donne

$${}^tX \cdot B \cdot X = {}^tX \cdot {}^tA \cdot A \cdot X = {}^t(A \cdot X) \cdot (A \cdot X) = \|A \cdot X\|^2.$$

Le vecteur X est non nul donc $\|X\|^2 > 0$. On sait que $\|A \cdot X\|^2$ est positif. Il vient donc

$$\lambda = \frac{\|A \cdot X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

II.B.3. La matrice B est une matrice symétrique réelle. Le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que $B = P^{-1} \cdot D \cdot P$.

Le fait que la matrice P soit orthogonale donne $P^{-1} = {}^tP$ donc $B = P^{-1} \cdot D \cdot P$.

La matrice D est alors de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{pmatrix},$$

les d_i étant les valeurs propres de D (et de B). Le rang de B est égal à celui de D , qui est égal au nombre d'indices i tels que $d_i \neq 0$.

Ce rang vaut 5 donc il y a exactement un des indices i pour lesquels d_i vaut 0 et les autres d_j sont non nuls, donc strictement positifs d'après II.B.2.

Si on permute les colonnes de P , alors on permute les coefficients correspondants sur la diagonale de D . Il est donc possible d'ajuster le choix de la matrice D pour le coefficient diagonal nul de D soit d_6 .

II.B.4. On remplace ${}^tA \cdot A$ par ${}^tP \cdot D \cdot P$ dans l'équation, ce qui donne les équivalences

$${}^tA \cdot A \cdot X = {}^tA \cdot Y_0 \iff {}^tP \cdot D \cdot P \cdot X = {}^tA \cdot Y_0 \iff D \cdot P \cdot X = P \cdot {}^tA \cdot Y_0.$$

Introduisons le vecteur $Y = P \cdot X$ et notons y_j ses coordonnées. On trouve alors

$$D \cdot P \cdot X = \begin{pmatrix} d_1 y_1 \\ d_2 y_2 \\ d_3 y_3 \\ d_4 y_4 \\ d_5 y_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si bien que la résolution de l'équation $D \cdot P \cdot X = P \cdot {}^tA \cdot Y_0$ se ramène à un système de cinq équations à cinq inconnues de résolution immédiate.

Oui mais. Que dire de la coordonnée y_6 ?

Si on décompose X selon la base de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$ constituée des colonnes $(P_1, \dots, P_6)$ de la matrice P , les coefficients sont précisément les y_i .

$$X = \sum_{i=1}^6 y_i P_i.$$

En appliquant B , il vient

$${}^tA \cdot A \cdot X = \sum_{i=1}^6 y_i d_i P_i = \sum_{i=1}^5 y_i d_i P_i.$$

La valeur y_6 peut donc être choisie arbitrairement.

II.C. Cette question pose un problème de vocabulaire : l'énoncé ne définit pas la notion de « distance minimale au sens des moindres carrés ».

Dans ce cas, on peut zapper tout bonnement la question ou faire un petit effort pour deviner de quoi il retourne. La signification de la phrase de l'énoncé est

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R}) ; \|A \cdot X - Y_0\|^2 = \min\{\|A \cdot Z - Y_0\|^2 ; Z \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})\}\}.$$

Prenons $Z \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. On observe la décomposition

$$A \cdot Z - Y_0 = \underbrace{A \cdot (Z - X_0)}_{\in \text{Im}(A)} + \underbrace{A \cdot X_0 - Y_0}_{\in n(\text{Im}(A))^\perp}.$$

La formule de Pythagore donne donc

$$\|A \cdot Z - Y_0\|^2 = \|A \cdot X_0 - Y_0\|^2 + \|A \cdot (Z - X_0)\|^2 \geq \|A \cdot X_0 - Y_0\|^2.$$

Cette minoration prouve que X_0 est un élément de $\mathcal{P}$.

Remarque. L'appartenance de Z à $\mathcal{P}$ équivaut à ce que $A \cdot (Z - X_0)$ soit nul. Les solutions du problème sont exactement les vecteurs de la forme $X_0 + \lambda P_6$ où λ parcourt $\mathbb{R}$.

III.A.1. Le calcul donne

$$\begin{cases} y_1 & = & x_1 + x_5 \\ y_2 & = & x_2 - x_5 \\ y_3 & = & x_3 \\ y_4 & = & x_4 \\ y_5 & = & 0 \\ y_6 & = & x_5 + x_6. \end{cases}$$

III.A.2. On transvase le contenu complet de la cruche C_3 dans la cruche C_1 . Le volume d'eau concerné vaut x_5 . Ainsi, le volume d'eau de C_1 augmente de x_5 et son volume d'air diminue de x_5 . Ces deux quantités deviennent respectivement $x_1 + x_5$ et $x_2 - x_5$.

Le contenu de C_2 ne change pas.

Le volume d'eau de C_3 passe à 0 et le nouveau volume d'air est la contenance totale de la cruche, à savoir $x_5 + x_6$.

Le vecteur associé aux différents volumes après la manipulation $v(3, 1)$ est donc le vecteur $\vec{y}$.

III.B.1. On suppose qu'on effectue $v(i, j)$. De même qu'à la question précédente, le stock d'eau de la cruche C_i , égal à x_{2i-1} , est entièrement transvasé dans la cruche C_j .

La troisième cruche ne change pas de contenu, si bien que $y_k = x_k$ si k n'est pas l'un des indices $2i, 2j, 2i-1, 2j-1$.

La cruche C_i perd toute son eau donc y_{2i-1} est nul et le volume d'air est maximal, c'est-à-dire $y_{2i} = x_{2i} + x_{2i-1}$.

La cruche C_j accueille le volume d'eau transvasé, ce qui augmente le volume d'eau et diminue le volume d'air selon les relations $y_{2j-1} = x_{2j-1} + x_{2i-1}$ et $y_{2j} = x_{2j} - x_{2i-1}$.

III.B.2. Les formules sont (en notant k l'indice de $\{1, 2, 3\}$ différent de i et de j)

$$\begin{cases} y_{2i-1} & = & x_{2i-1} - x_{2j} \\ y_{2i} & = & x_{2i} + x_{2j} \\ y_{2j-1} & = & x_{2j-1} + x_{2j} \\ y_{2j} & = & 0 \\ y_{2k-1} & = & x_{2k-1} \\ y_{2k} & = & x_{2k}. \end{cases}$$

III.C.1. La famille $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq 6, i \neq k}$ est extraite de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ donc c'est une famille libre. Elle engendre E_k donc c'est une base de E_k . C'est une famille de 5 vecteurs donc E_k est de dimension 5. C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^6$.

III.C.2. Cet hyperplan est défini par l'équation $x_k = 0$.

III.D.1. Si on part d'un vecteur $\vec{x}$ de E_{2i-1} , alors la coordonnée x_{2i-1} est nulle, si bien que dans la manipulation $v(i, j)$, on transvase une quantité nulle d'eau. On obtient donc $\vec{y} = \vec{x}$ dans ce cas, ce qui revient à dire que le vecteur $\vec{x}$ est invariant par $V_{i,j}$.

III.D.2. De même, si le vecteur $\vec{x}$ est pris dans E_{2j} , la quantité d'air déplacée par $p(i, j)$ est nulle, si bien que le vecteur $\vec{x}$ est invariant par $P_{i,j}$.

III.D.3. Dans les relations de la question III.B.1, l'égalité $y_{2i-1} = 0$ signifie que la ligne numéro $2i - 1$ de la matrice $M_{i,j}$ est nulle.

III.D.4. De la même manière qu'en III.D.3, la ligne numéro $2j$ de la matrice canoniquement associée à $P_{i,j}$ est nulle.

Pour chacune des applications $V_{i,j}$ et $P_{i,j}$, on a vu que le rang est majoré par 5 (présence d'une ligne nulle dans la matrice canoniquement associée) donc le noyau est de dimension au moins 1.

On a vu aussi que chacune de ces applications laisse stable un espace de dimension 5, ce qui donne un espace propre de dimension au moins 5 pour la valeur propre 1.

Par le même raisonnement qu'en I.C.4, on en déduit que ces applications sont diagonalisables, semblables à la même matrice que celle de f . Ce sont en fait toutes des projections de rang 5.

IV.A.1. Les couples $(8, 0)$, $(0, 5)$, $(0, 3)$ qui constituent le vecteur $\vec{a}$ traduisent l'état initial de trois cruches, de capacités respectives 8, 5, 3, contenant uniquement de l'eau pour la première, uniquement de l'air pour les deux autres.

Les couples $(4, 4)$, $(4, 1)$, $(0, 3)$ qui constituent le vecteur $\vec{b}$ correspondent encore à des cruches de capacités respectives 8, 5, 3, mais cette fois, les contenus en eau sont respectivement 4, 4, 0, ce qui revient bien à avoir partagé les 8 litres initialement dans la cruche C_1 en deux portions de 4 litres.

Ces vecteurs traduisent donc l'état initial et l'état final souhaité dans le problème à résoudre.

IV.A.2. On a vu en I.E.3 l'égalité $f(\vec{c}) = \vec{b}$. Le préambule de III.B.2 donne l'égalité $f = V_{3,1}$.

Ainsi, la manipulation $v(3, 1)$ (on transvase la cruche C_3 dans C_1) permet de passer de l'état associé à $\vec{c}$ à l'état final souhaité.

IV.A.3. Chaque manipulation a pour effet de vider une cruche (auquel cas elle ne contient plus d'eau) ou de remplir une cruche (auquel cas elle ne contient plus d'air). Il y a donc à chaque étape au moins une coordonnée nulle.

IV.B.1. À partir de l'état codé par $\vec{c}$, les seules manipulations possibles sont $v(1, 2)$ (qui équivaut à $p(1, 2)$ en l'occurrence), $v(2, 1)$, $v(3, 1)$ et $p(3, 2)$.

La manipulation $v(1, 2)$ aboutit à $(8, 0, 0, 5, 0, 3)$, qui n'est pas un vecteur privilégié.

La manipulation $v(2, 1)$ aboutit à $(3, 5, 5, 0, 0, 3)$, qui n'est pas un vecteur privilégié.

La manipulation $v(3, 1)$ aboutit à $\vec{b}$, comme on l'a mentionné en IV.A.2.

Enfin, la manipulation $p(2, 3)$ aboutit à $\vec{a}$, qui est bien un vecteur privilégié.

IV.B.2. La manipulation $p(2, 3)$ permet de repasser de $\vec{d}$ à $\vec{c}$.

IV.C. La manipulation $v(1, 2)$ permet de passer de l'état initial à l'état associé à $\vec{h}$.

IV.D. On résout le problème en effectuant successivement

$$v(1, 2), \quad p(2, 3), \quad v(3, 1), \quad v(2, 3), \quad p(1, 2), \quad p(2, 3), \quad v(3, 1).$$

IV.E.1. Les manipulations produisent des vecteurs à coefficients entiers. Le quotient $8/3$ n'est pas un entier. Il est donc impossible d'obtenir une répartition égale entre les trois cruches.

IV.E.2. La répartition (4 litres, 2 litres, 2 litres) est associée au vecteur $(4, 4, 2, 3, 2, 1)$. Ce vecteur n'a aucune coordonnée nulle donc on ne peut pas l'obtenir.

IV.F.1. On trouve $Y_0 = \frac{1}{3}(8, 16, 8, 7, 8, 1)$.

IV.F.2. Le projeté orthogonal de Y_0 sur E_1 est le vecteur $(0, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, si bien que la distance euclidienne de Y_0 à E_1 vaut $|y_1|$.

Plus généralement, la distance euclidienne de Y_0 à E_k vaut $|y_k|$.

Au vu des coordonnées de Y_0 , la distance à E_k est minimale pour $k = 6$, auquel cas la distance en question vaut $1/3$.

V.A. Le nom de la fonction est bizarrement choisi mais admettons.

Les détails d'implémentation ne sont pas précisés dans l'énoncé donc c'est à nous de gérer cela. On va supposer que le tableau T est une variable globale codée en Python sous la forme d'une liste de listes, chaque liste étant la représentation d'une colonne.

L'algorithme est un classique balayage pour détecter la présence d'un élément. Si on tombe dessus, on interrompt la boucle pour conclure. Par contre, pour pouvoir conclure à l'absence de l'élément, il faut avoir testé toute la liste.

```

1 def figure(a, b, c):
2     entree = [a, b, c]
3     for colonne in T:
4         if colonne == entree:
5             return True
6     return False

```

V.B. La question ne demande pas d'écrire une fonction mais je le fais quand même. Je stocke une fois pour toute dans une liste (globale) les capacités des cruches afin de les utiliser dans les tests.

```

1  capacites = [8, 5, 3]

3  def etat_suivant(i, j, m):
4      ajout = False
5      new_col = T[m][:] # Copie de l'état des cruches
6      if T[m][i] > 0:
7          total = T[m][i] + T[m][j]
8          if total <= capacites[j]: # On fait v(i, j)
9              new_col[i] = 0
10             new_col[j] = total
11             ajout = True
12         elif T[m][j] < capacites[j]: # On fait p(i, j)
13             difference = capacites[j] - T[m][j]
14             new_col[i] = T[m][i] - difference
15             new_col[j] = capacites[j]
16             ajout = True
17     if ajout:
18         a, b, c = new_col
19         if not figure(a, b, c):
20             T.append(new_col)
21     return ajout

```

V.C.

```

1  init = [capacites[0], 0, 0]
2  objectif = [capacites[0] // 2, capacites[0] // 2, 0]
3  T = [init]
4  m = 0

6  while T[m] != objectif:
7      for i in range(3):
8          for j in [k for k in range(3) if k != i]:
9              if etat_suivant(i, j, m):
10                 m += 1
11  print(T)

```

Remarque. Il n'y a aucune raison a priori pour que cet algorithme termine. C'est une approche assez peu fiable. Il est probable que je n'aie pas réalisé ce qui est attendu.

Une meilleure manière pour résoudre ce problème serait de lui associer un *graphe* en prenant pour sommet les états possibles du système et en mettant une arête orientée à chaque fois qu'on peut passer d'un état à un autre. Il n'y a plus ensuite qu'à chercher un chemin de l'état initial à l'état cible en appliquant par exemple un algorithme de plus court chemin.

V.D. Difficile de deviner dans quel ordre le programme choisit ses opérations.

Dans l'exemple proposé, on voit que l'opération $v(3, 1)$ termine tout, mais comment savoir si c'est ce qui se passe à l'étape suivante?

V.E. Sérieusement, c'est une question?