

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 6 — piste rouge

I.A.1. Soit P dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Les égalités

$${}^tP \cdot P = I_n \quad \text{et} \quad \det({}^tP) = \det(P)$$

donnent $(\det(P))^2 = 1$ donc le déterminant de P vaut 1 ou -1 . Les éléments de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ont donc un déterminant égal à 1. Ceux de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ ont un déterminant égal à -1 .

I.A.2. L'élément neutre du groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la matrice I_n , dont le déterminant vaut 1. Cet élément n'est pas dans $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ donc cet ensemble n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

I.A.3. Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit (i, j) un couple d'indices entre 1 et n . Le coefficient $P_{i,j}$ est donné par

$$P_{i,j} = {}^tE_i \cdot P \cdot E_j = \langle E_i, P \cdot E_j \rangle.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|P_{i,j}| \leq \|E_i\|_2 \times \|PE_j\|_2.$$

On sait que $\|E_i\|_2$ vaut 1. De plus, la matrice P est orthogonale donc elle préserve la norme euclidienne donc $\|PE_j\|_2$ vaut 1 aussi. On trouve donc finalement

$$|P_{i,j}| \leq 1.$$

I.B.1. Tout se fait très directement

$$\alpha_1 = 2e^{i \times 0}, \quad \alpha_2 = 2e^{i\pi/4}, \quad \beta_1 = e^{i\pi/3}, \quad \beta_2 = e^{i2\pi/3}.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$f(\theta) = \left| e^{i\pi/3} - 2e^{i\theta} \right|^2 + \left| e^{i2\pi/3} - 2e^{i(\theta+\pi/4)} \right|^2.$$

On peut effectuer le calcul suivant pour tout couple (s, t) de $\mathbb{R}^2$

$$\left| e^{is} - 2e^{it} \right|^2 = (e^{is} - 2e^{it})(e^{-is} - 2e^{-it}) = 1 + 4 - 2(e^{i(s-t)} + e^{i(-s+t)}) = 5 - 4\cos(s-t).$$

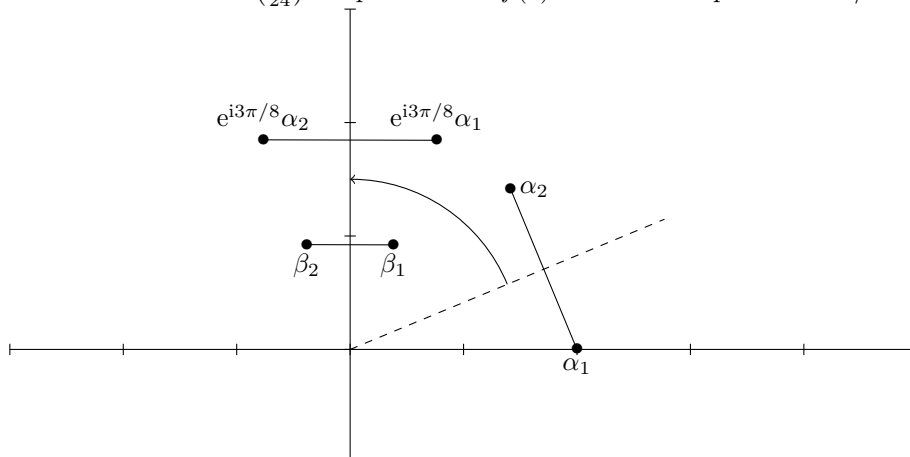
On trouve donc

$$f(\theta) = 10 - 4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\left(\theta - \frac{5\pi}{12}\right).$$

En utilisant l'identité $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, on obtient finalement

$$f(\theta) = 10 - 8\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{24}\right).$$

I.B.2. Le coefficient $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ est positif donc $f(\theta)$ est minimisé pour $\theta = 3\pi/8$.



La rotation d'angle $3\pi/8$ envoie le segment d'origine sur un segment qui admet la même médiatrice que le segment cible.

II.A.1. C'est du cours.

II.A.2. La norme au carré d'une matrice est la somme des carrés de ses coefficients. C'est la même chose que la somme des normes au carré de ses colonnes.

II.A.3. Soient W dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et (M, N) dans $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))^2$.

$$\langle WM, WN \rangle_F = \text{tr}({}^t(WM)(WN)) = \text{tr}({}^tM \underbrace{{}^tWW}_{=I_n} N) = \text{tr}({}^tMN) = \langle M, N \rangle.$$

En particulier, dans le cas où M et N sont égales, on obtient $\|MW\|_F = \|M\|_F$.

II.A.4. Soient W dans $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et (M, N) dans $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))^2$.

$$\langle MW, NW \rangle_F = \text{tr}({}^t(MW)(NW)) = \text{tr}({}^tW {}^tMNW) = \text{tr}({}^tMN \underbrace{W {}^tW}_{=I_m}) = \text{tr}({}^tMN) = \langle M, N \rangle.$$

En particulier, dans le cas où M et N sont égales, on obtient $\|MW\|_F = \|M\|_F$.

II.B.1. Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On trouve

$$\|W\|_F^2 = \text{tr}({}^tWW) = \text{tr}(I_n) = n$$

donc $\|W\|_F = 1$.

II.B.2. Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que cette suite converge vers une certaine matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on connaît l'égalité ${}^tM_k \times M_k = I_n$.

La transposition est continue (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie), de même que le produit matriciel (application bilinéaire entre espaces vectoriels de dimension finie) donc, en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient ${}^tM \times M = I_n$, si bien que M est un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Par le critère séquentiel, on en déduit que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.B.3. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (question II.B.1) et fermée (question II.B.2) donc c'est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(Cette notion n'est plus au programme.)

II.C.1. La fonction $W \mapsto \|WX - Y\|_F^2$ est continue sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, qui est fermé et borné, donc cette fonction possède un minimum.

II.C.2. Soit W dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\|WX - Y\|_F^2 = \|WX\|_F^2 - 2\langle WX, Y \rangle_F + \|Y\|_F^2 = \underbrace{\|X\|_F^2 + \|Y\|_F^2}_{\text{constante}} - 2\langle WX, Y \rangle_F.$$

Ainsi, la quantité $\|WX - Y\|_F^2$ est minimale si, et seulement si, la quantité $\langle WX, Y \rangle$ est maximale.

II.C.3. Soit W dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle WX, Y \rangle_F = \text{tr}({}^t(WX) \cdot Y) = \text{tr}({}^tX {}^tWY) = \text{tr}({}^tWY {}^tX) = \langle W, Y {}^tX \rangle_F.$$

Le choix $A = Y {}^tX$ convient donc.

II.D.1. Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Le fait que ses coefficients soient majorés par 1 en valeur absolue donne

$$\langle W, \Delta \rangle_F = \sum_{i=1}^n W_{i,i} \Delta_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n |W_{i,i}| \Delta_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \Delta_{i,i} = \text{tr}(\Delta),$$

avec égalité si W est la matrice I_n . Le choix $W = I_n$ maximise donc $\langle W, \Delta \rangle_F$.

II.D.2. Soit W une matrice réalisant le cas d'égalité. On obtient alors

$$\sum_{i=1}^r \Delta_{i,i} (1 - W_{i,i}) = 0.$$

Tous les termes de cette somme étant positifs, on en déduit qu'ils sont nuls. Comme les $\Delta_{i,i}$ sont non nuls, il reste $W_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Comme les colonnes de W sont de norme 1, les coefficients non diagonaux des r premières colonnes de W sont nuls. Ces colonnes sont donc les colonnes $E_1, \dots, E_r$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La matrice W s'écrit donc par blocs sous la forme

$$W = \begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice C de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.

La relation ${}^tW \cdot W = I_n$ donne

$$\begin{pmatrix} I_r & B \\ {}^tB & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

On en déduit les égalités $B = 0$ et ${}^tCC = I_{n-r}$, ce qui prouve que C est une matrice orthogonale. La matrice W est donc de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice orthogonale C .

Réciproquement, toutes les matrices de cette forme sont des solutions du problème (je ne le détaille pas).

II.E.1. Soit W dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Un calcul rapide donne l'égalité

$$\langle W, A \rangle_F = \langle {}^tQWP, \Delta \rangle.$$

Pour que $\langle W, A \rangle_F$ soit maximal, il suffit donc d'avoir ${}^tQWP = I_n$, c'est-à-dire $W = Q {}^tP$.

On choisit donc W ainsi. Cette matrice est alors un produit de deux matrices orthogonales donc c'est bien une matrice orthogonale.

On obtient alors $\det(W) = \det(Q) \det({}^tP) = \det(Q) \det(P)$. Ainsi, l'appartenance de W à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ équivaut à ce que le produit $\det(Q) \det(P)$ soit strictement positif.

II.E.2. Le raisonnement de la question **II.D.2** montre que la matrice $W = I_n$ est la seule à réaliser le cas d'égalité de la question **II.D.1** dans le cas où les valeurs propres de Δ sont toutes non nulles.

En reprenant le raisonnement de la question précédente, on voit que le choix $W = Q {}^tP$ est le seul possible. De plus, le déterminant de cette matrice est strictement positif car il vaut $\det(A)/\det(\Delta)$.

II.E.3. En reprenant le raisonnement de II.D.2, on voit qu'il suffit de prendre pour W' la matrice obtenue à partir de I_n en remplaçant le dernier coefficient diagonal par -1 .

II.E.4. Reprenons la matrice W' de la question précédente. Par le même raisonnement qu'en II.E.1, pour que W maximise $\langle W, A \rangle$, il suffit d'avoir ${}^tQWP = W'$, c'est-à-dire $W = QW'P$.

Pour ce choix, la matrice W est orthogonale (produit de matrices orthogonales) et son déterminant est strictement positif.

III.A.1. On trouve directement ${}^tB = B$.

La matrice B est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Le théorème spectral donne l'existence d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice B .

Évidemment, toute autre formulation convenable du théorème spectral est acceptée.

III.A.2. Soit λ une valeur propre de B . Celle-ci est réelle d'après le théorème spectral. Prenons un vecteur propre associé, noté V .

On a alors ${}^tVBV = {}^tV \times \lambda V = \lambda \|V\|^2$, or $\|V\|^2 > 0$ donc

$$\lambda = \frac{{}^tVBV}{\|V\|^2} \geq 0.$$

III.A.3. Soit $U \in \text{Ker}(M)$. On obtient alors $MU = 0$ donc ${}^tMMU = 0$ donc U est dans $\text{Ker}(B)$.

Réciproquement, soit $U \in \text{Ker}(B)$. On a alors $\|MU\|^2 = {}^t(MU)(MU) = {}^tUBU = 0$ donc $MU = 0$ donc U est dans $\text{Ker}(M)$.

On a alors prouvé l'égalité $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(M)$.

La matrice M est dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donc le théorème du rang donne $r = p - \dim(\text{Ker}(M))$.

La matrice B est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc le théorème du rang donne $\text{rg}(B) = p - \dim(\text{Ker}(B))$.

On en déduit l'égalité $\text{rg}(B) = r$.

III.B.1. Pour tout indice $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, notons V_i le vecteur colonne canoniquement associé à v_i et U_i celui associé à u_i , de sorte que $U_i = \frac{1}{\mu_i} MV_i$.

Soient i et j deux indices dans $\llbracket 1, r \rrbracket$. On trouve

$$(u_i|u_j) = {}^tU_iU_j = \frac{1}{\mu_i\mu_j} {}^t(MV_i)(MV_j) = \frac{1}{\mu_i\mu_j} {}^tV_i({}^tMM)V_j = \frac{1}{\mu_i\mu_j} {}^tV_i\lambda_jV_j = \frac{\mu_j}{\mu_i}(v_i|v_j).$$

Si $i \neq j$, on obtient donc $(u_i|u_j) = 0$. Si $i = j$, on obtient $(u_i|u_j) = 1$.

La famille $(u_1, \dots, u_r)$ est donc une famille orthonormale. C'est en particulier une famille libre. Elle est constituée de vecteurs de $\text{Im}(f)$ et elle compte r vecteurs, ce qui est la dimension de $\text{Im}(f)$.

C'est donc une base orthonormale de $\text{Im}(f)$.

III.B.2. Complétons la famille $(u_1, \dots, u_r)$ en une base orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, notée $\mathcal{U}$.

Notons $\mathcal{V}$ la base orthonormale $(v_1, \dots, v_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

La matrice Δ proposée est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$. Ainsi, en notant P et Q les matrices qui représentent ces deux bases dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, ces matrices sont orthogonales (matrices de passages entre bases orthonormales) et la formule de changement de bases donne

$$\Delta = Q^{-1}MP, \quad \text{c'est-à-dire} \quad M = Q\Delta P^{-1}$$

puis $M = Q\Delta({}^tP)$ en utilisant que P est une matrice orthogonale.

IV.A.1. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On remarque l'égalité $\text{tr}(M) = \langle M, I_n \rangle_F$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\text{tr}(M) \leq \|M\|_F \times \|I_n\|_F = n.$$

On sait qu'il y a égalité si $M = I_n$ (et I_n est une matrice orthogonale) donc la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vaut n .

IV.A.2. Soit λ une éventuelle valeur propre de w . Soit x un vecteur propre associé. On connaît l'égalité $\|w(x)\| = \|x\|$, ce qui donne $\|\lambda x\| = \|x\|$ puis $|\lambda| \times \|x\| = \|x\|$ puis $|\lambda| = 1$ (en utilisant le fait que $\|x\|$ ne soit pas nul).

Toute éventuelle valeur propre de w vaut donc 1 ou -1 .

IV.A.3. Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que W n'admet pas -1 pour valeur propre.

Ses valeurs propres sont alors des nombres non réels (et non nuls) ainsi éventuellement que 1. Chaque valeur propre non réelle est accompagnée de son conjugué, avec la même multiplicité (ça découle du fait que χ_W est un polynôme réel).

Notons $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_s, \overline{\lambda_s}$ les éventuelles valeurs propres non nulles de W , regroupées par paires de nombres conjugués, et notons $m_1, \dots, m_s$ les multiplicités correspondantes. On obtient alors

$$\det(W) = \prod_{k=1}^s |\lambda_k|^{2m_k} > 0.$$

Par contraposition, si W a un déterminant strictement négatif, alors elle admet -1 pour valeur propre.

IV.A.4. C'est fait dans le cours.

IV.A.5. Soit $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. On a vu en IV.A.3 que W admet -1 pour valeur propre. Prenons un vecteur propre U_1 associé et supposons qu'il est de norme 1 (dans le cas contraire, on le normalise en le divisant par sa norme).

On peut alors considérer des vecteurs $U_2, \dots, U_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $(U_1, \dots, U_n)$ soit une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notée $\mathcal{U}$. Notons P_1 la matrice dont $U_1, \dots, U_n$ sont les colonnes. C'est une matrice orthogonale.

La formule de changement de base donne que $P_1^{-1}WP_1$ représente dans la base $\mathcal{U}$ l'endomorphisme $f_W : U \mapsto WU$.

On sait que WU_1 est égal à $-U_1$ et, par IV.A.4, que $\text{Vect}(U_1)^\perp$ est stable par f_W . Cet orthogonal est l'espace engendré par $(U_2, \dots, U_n)$.

On déduit de tout cela que la matrice $P_1^{-1}WP_1$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice W_1 de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La matrice W_1 représente dans la base orthonormale $(U_2, \dots, U_n)$ de $\text{Vect}(U_1)^\perp$ l'endomorphisme induit par f_W , qui est une isométrie. Cette matrice est donc orthogonale.

De plus, le déterminant par blocs donne $\det(W) = -\det(W_1)$ donc $\det(W_1) > 0$. La matrice W_1 est donc un élément de $\mathcal{O}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ et on a la relation

$$W = P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix} ({}^tP_1)$$

en exploitant le caractère orthogonal de la matrice P_1 .

IV.A.6. En reprenant les notation de la question précédente, on obtient $\text{tr}(W) = -1 + \text{tr}(W_1)$. La valeur maximale pour $\text{tr}(W_1)$ est $n-1$ d'après IV.A.1 (obtenue pour le choix $W_1 = I_{n-1}$) donc la valeur maximale pour $\text{tr}(W)$ quand w décrit $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est $n-2$.

IV.B.1. Soit $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. Le calcul donne directement

$$\langle W', \Delta \rangle_F = \sum_{i=1}^n \Delta_{i,i} W'_{i,i} = \Delta_{n,n} \operatorname{tr}(W') + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta_{i,i} - \Delta_{n,n}) W'_{i,i}.$$

Le nombre $\Delta_{n,n}$ est positif, de même que les différences $\Delta_{i,i} - \Delta_{n,n}$.
On connaît aussi les majorations $\operatorname{tr}(W') \leq n-2$ et $W'_{i,i} \leq 1$ donc

$$\langle W', \Delta \rangle_F \leq \Delta_{n,n}(n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta_{i,i} - \Delta_{n,n}) = \operatorname{tr}(\Delta) - 2\Delta_{n,n}.$$

Le cas d'égalité est réalisé en prenant pour W' la même matrice qu'en II.E.3. Ce choix maximise donc $\langle W', \Delta \rangle$.

IV.B.2. Comme en II.E.4, il suffit de choisir $W = QW'({}^tP)$.

V.A.1.

```
1 def f(x):
2     return (x**3 + 3*x) / (3*x**2 + 1)

4 nb_termes = 30
5 x0 = 0.1
6 tab = [x0] + nb_termes*[0]
7 for n in range(nb_termes):
8     tab[n+1] = f(tab[n])
```

Ça suffira pour le moment !