

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 6 — piste noire

Sujet d'origine : X-ENS-ESPCI PC 2011

1.a. Cette première question comporte une erreur d'énoncé : la fonction à étudier est intégrable sur $]0, +\infty[$ et non sur $[0, +\infty[$ puisqu'elle n'est pas définie en 0 en général.

Soit s dans $]0, +\infty[$. La fonction $f_s : x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Quand x tend vers 0, on remarque que $|f_s(x)|$ est équivalent à x^{s-1} , c'est-à-dire $1/x^{1-s}$. L'exposant $1-s$ est dans l'intervalle $] -\infty, 1[$ donc la fonction $x \mapsto 1/x^{1-s}$ est intégrable sur $]0, 1[$. Par le critère des équivalents, on en déduit que la fonction f_s est intégrable sur $]0, 1[$.

Quand x tend vers $+\infty$, on sait que $x^{s+1}e^{-x}$ tend vers 0. On en déduit que $f_s(x)$ est négligeable devant $1/x^2$ quand x tend vers $+\infty$. On sait que la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par le critère de négligeabilité, on en déduit que la fonction f_s est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement, la fonction f_s est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et c'est vrai pour tout $s > 0$.

1.b. Traité en classe : une intégration par parties donne $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour tout $s > 0$ et on trouve $\Gamma(1) = 1$. Par itération, on obtient $\Gamma(m) = (m-1)!$ pour tout m dans $\mathbb{N}^*$.

1.c. Traité en classe dans le chapitre sur les intégrales dépendant d'un paramètre.

2.a. L'énoncé de cette question est incohérent : dans la première partie, l'inégalité est à prouver dans le cas où x est fixé dans un intervalle qui dépend d'un entier m fixé ; dans la deuxième partie, on doit faire tendre m vers $+\infty$ en gardant x fixé indépendamment de m .

Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Soit x dans $[0, m[$. On écrit

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \exp\left(m \ln\left(1 - \frac{x}{m}\right)\right).$$

Là, on case une démonstration de l'inégalité

$$\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leq t$$

et on remarque que $-x/m$ est dans l'intervalle $] -1, +\infty[$, ce qui donne

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq \exp\left(m \left(\frac{x}{m}\right)\right) = e^{-x}.$$

On remarque ensuite que dans le cas $x = m$, l'inégalité à prouver est $0 \leq e^{-m}$, ce qui est vrai.

Pour la deuxième partie de la question, on fixe x dans $[0, +\infty[$. Pour tout entier $m > x$, on peut alors écrire

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \exp\left(m \ln\left(1 - \frac{x}{m}\right)\right).$$

Un développement limité donne alors $\ln\left(1 - \frac{x}{m}\right) = -\frac{x}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right)$ quand l'entier m tend vers $+\infty$.

On en déduit que l'exposant $m \ln\left(1 - \frac{x}{m}\right)$ tend vers $-x$. Par continuité de l'exponentielle, on obtient donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}.$$

J'ajoute que cette étape ne sert en fait à rien car le passage à la limite dont on a besoin en 2.c est légèrement différent.

2.b. Notons tout d'abord que pour tout m dans $\mathbb{N}^*$ (et non dans $\mathbb{N}$ comme le laisse entendre l'énoncé) et tout s dans $]0, +\infty[$, l'intégrale proposée est convergente. La fonction

$$x \mapsto \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$$

est continue sur $]0, m]$ et elle est équivalente en 0 à $x \mapsto x^{s-1}$. On conclut comme en 1.a.

$$\text{Notons } I(m, s) = \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} ds.$$

Commençons par effectuer le changement de variable $t = x/m$. C'est licite car la fonction $x \mapsto x/m$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0, m]$ sur $]0, 1]$. On obtient

$$I(m, s) = m^s \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt.$$

Notons maintenant $J(m, s) = \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt$. Cette définition peut être étendue au cas $m = 0$.

Soient m dans $\mathbb{N}^*$ et $s > 0$. Prenons $\alpha > 0$ et effectuons une intégration par parties : on dérive la fonction $t \mapsto (1-t)^m$ et on primitive la fonction $t \mapsto t^{s-1}$ en $t \mapsto t^s/s$.

$$\int_\alpha^1 (1-t)^m t^{s-1} dt = \left[(1-t)^m \frac{t^s}{s} \right]_{s=\alpha}^1 - \int_\alpha^1 (-m(1-t)^{m-1}) \frac{t^s}{s} dt = -(1-\alpha)^m \frac{\alpha^s}{s} + \frac{m}{s} \int_\alpha^1 (1-t)^{m-1} t^s dt.$$

On fait tendre α vers 0 et on obtient $J(m, s) = (m/s)J(m-1, s+1)$. En itérant la relation de récurrence, on trouve

$$J(m, s) = \frac{m}{s} \times \frac{m-1}{s+1} J(m-2, s+2) = \cdots = \frac{m}{s} \times \frac{m-1}{s+1} \times \cdots \times \frac{1}{s+m-1} J(0, s+m).$$

Un dernier calcul donne $J(0, s+m) = \int_0^1 t^{s+m-1} dt = 1/(s+m)$ puis

$$J(m, s) = \frac{m!}{s(s+1) \cdots (s+m)} \quad \text{puis} \quad I(m, s) = \frac{m! m^s}{s(s+1) \cdots (s+m)}.$$

2.c. Fixons $s > 0$. Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$f_m : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} & \text{si } x \in]0, m[\\ 0 & \text{si } x \in [m, +\infty[. \end{cases}$$

La fonction f_m est continue par morceaux.

Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on prouve que $f_m(x)$ tend vers $e^{-x} x^{s-1}$ quand m tend vers $+\infty$. Il serait faux de dire que c'est le calcul effectué en 2.a car on n'a pas considéré de fonction définie par morceaux à ce moment-là, mais il est correct de dire que c'est le même raisonnement, car pour un x donné, pour tout entier $m > x$, on a

$$f_m(x) = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}.$$

La fonction limite $f : x \mapsto e^{-x} x^{s-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Soit m dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout x dans $]0, m]$, le calcul de 2.a donne

$$|f_m(x)| \leq e^{-x} x^{s-1}.$$

De plus, cette inégalité est bien sûr valable aussi pour tout x dans $]m, +\infty[$. On obtient donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad |f_m(x)| \leq f(x).$$

Il est important de noter que le majorant est indépendant de m . De plus, la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$, ainsi qu'on l'a vu à la question 1.a.

Tout ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_m(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} I(m, s) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1) \cdots (s+m)}.$$

Remarque. Le préambule de la deuxième partie est un vrai capharnaüm. La notation

$$\forall X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

est du pur n'importe quoi. D'abord, faire suivre un quantificateur universel d'un signe égal n'a pas beaucoup de sens. Ensuite, la transposée d'un n -uplet est une notion a priori mystérieuse. Cela dit, le préambule de l'énoncé annonce qu'on identifie les n -uplets avec les matrices colonnes; j'en déduis que la transposée d'un n -uplet est censée être une matrice ligne! Mais alors la matrice ligne X est censée être un élément de $\mathbf{R}^n$ (avec une notation en caractères gras d'un autre temps), c'est-à-dire que cette matrice ligne est censée être une matrice colonne!

La suite de ce préambule fait apparaître le produit tXAX , pour lequel il est clair que X doit être finalement une matrice colonne. Pour finir ma liste de griefs, la condition

$$\langle X, AX \rangle = {}^tXAX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \geq 0$$

est formulée de manière bizarre sur le plan logique : seule l'inégalité est une condition ; les deux égalités initiales sont des identités toujours vraies.

3. Notons (E_1, E_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, de sorte qu'on a

$$a = {}^tE_1 A E_1 \quad \text{et} \quad d = {}^tE_2 A E_2.$$

Commençons par supposer que A est positive. Les formules ci-dessus prouvent que a et d sont positifs. Soit maintenant t quelconque dans $\mathbf{R}$. Notons X la matrice colonne canoniquement associée à $(1, t)$. On trouve

$${}^tXAX = a + 2tb + t^2 d^2.$$

Si d est non nul, on obtient là un polynôme réel de degré 2 à valeurs positives. Il ne change pas de signe donc son discriminant est négatif, ce qui s'écrit

$$4b^2 - 4ad \geq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \det(A) \geq 0.$$

Si d est nul, on obtient alors $a + 2tb \geq 0$ pour tout t réel, ce qui oblige b à être nul. Dans ce cas, le déterminant de A vaut 0.

Réciproquement, on fait les hypothèses

$$a \geq 0, \quad d \geq 0, \quad \det(A) \geq 0.$$

On suppose que a est nul. La condition $\det(A) \geq 0$ s'écrit alors $-b^2 \geq 0$ donc b est nul aussi. Pour tout vecteur colonne X , on obtient alors

$${}^tXAX = d(x_2)^2 \geq 0$$

si bien que la matrice A est positive. Le calcul est similaire si on suppose que d est nul.

On suppose donc maintenant que a et d sont strictement positifs. Prenons un vecteur colonne X quelconque.

$${}^tXAX = a(x_1)^2 + 2bx_1x_2 + d(x_2)^2.$$

Effectuons une mise sous forme canonique.

$${}^tXAX = a \left(x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2 + \frac{ad - b^2}{a} (x_2)^2.$$

L'hypothèse $\det(A) \geq 0$ permet de conclure que cette expression est positive.

Remarque. J'ai fait ce que j'ai pu pour rédiger une méthode qui n'utilise pas le résultat de la question 4 alors que ça simplifierait tout. C'est encore un aspect bizarre de la conception de cet énoncé.

4. Traité en classe.

5. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On trouve ${}^tXBX = {}^tYAY$ en posant

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}.$$

Le nombre tXBX est donc positif pour tout vecteur colonne X . La matrice B est positive.

6. Soit X un vecteur colonne. On trouve

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{j=1}^n x_j u_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 \geq 0.$$

La matrice A est positive.

7. Notons $b_1, \dots, b_n$ les coefficients diagonaux de B . Les coefficients de AB sont alors donnés par

$$(AB)_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} b_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Soit X un vecteur colonne. On trouve alors

$${}^tX(A * B)X = \sum_{i=1}^n a_{i,i} b_i (x_i)^2.$$

En notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,i} = {}^tE_i A E_i \geq 0.$$

Ainsi, dans la somme $\sum_{i=1}^n a_{i,i} b_i (x_i)^2$, tous les termes sont positifs. On en déduit que ${}^tX(A * B)X$ est positif. C'est vrai pour tout vecteur colonne donc la matrice $A * B$ est positive.

8.a. D'après le théorème spectral, il existe une matrice P orthogonale telle que la matrice $D = {}^tPAP$ soit diagonale. Notons $d_1, \dots, d_n$ ses coefficients diagonaux. Ce sont les valeurs propres de A donc ces nombres sont positifs.

On reprend la notation $(E_1, \dots, E_n)$ pour la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On trouve alors

$$D = \sum_{k=1}^n Z_k \cdot {}^tZ_k$$

en posant $Z_k = \sqrt{d_k} E_k$, puis

$$A = \sum_{k=1}^n Y_k \cdot {}^tY_k$$

en posant $Y_k = PZ_k$.

8.b. Commençons par prouver que pour tout vecteur colonne Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $A * (Y \cdot {}^tY)$ est positive. Il suffit pour cela de remarquer que cette matrice a pour coefficients les nombres de la forme $a_{i,j} y_i y_j$ et d'appliquer le résultat de la question 5.

Maintenant, appliquons le résultat de la question 8.a et introduisons des vecteurs colonnes $Y_1, \dots, Y_n$ vérifiant l'égalité

$$B = \sum_{k=1}^n Y_k \cdot {}^tY_k.$$

Remarquons ensuite que l'application $M \mapsto A * M$ est linéaire (je le laisse en exercice). On obtient donc

$$A * B = \sum_{k=1}^n A * (Y_k \cdot {}^t Y_k).$$

Prenons un vecteur colonne X . On trouve

$${}^t X(A * B)X = \sum_{k=1}^n {}^t X(A * (Y_k \cdot {}^t Y_k)X \geq 0$$

car tous les termes de cette somme sont positifs.

La matrice $A * B$ est donc positive.

9.a. On reprend la notation $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ de la question 3.

Soit $r \in]0, +\infty[$. La matrice A^{*r} s'écrit $\begin{pmatrix} a^r & b^r \\ b^r & d^r \end{pmatrix}$.

Les coefficients a^r et d^r sont positifs. De plus, on connaît l'inégalité $ad - b^2 \geq 0$, c'est-à-dire $ad \geq b^2$. La fonction $t \mapsto t^r$ est croissante donc $(ad)^r \geq b^{2r}$ donc $\det(A^{*r}) \geq 0$.

Le critère de la question 3 prouve que la matrice A^{*r} est positive. C'est vrai pour tout $r > 0$ donc la matrice A est infiniment divisible.

9.b. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve

$${}^t X A X = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + (x_3)^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0.$$

La matrice A est donc positive.

Soit $r > 0$. Les coefficients de A^{*r} sont les mêmes que ceux de A , sauf le 2 qui devient 2^r . Soit X un vecteur colonne

$${}^t X A^{*r} X = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + (x_3)^2 + 2^r x_1x_2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (2^r - 2)(x_2)^2.$$

Si $r \geq 1$, cette somme est positive et on en déduit que A^{*r} est positive.

Si $r < 1$, on choisit $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1)$ et on obtient

$${}^t X A^{*r} X = 2^r - 2 < 0$$

si bien que A^{*r} n'est pas positive.

10. Soit $r > 0$. Les coefficients de la matrice B^{*r} sont donnés par

$$(B^{*r})_{i,j} = \lambda_i^r \lambda_j^r (a_{i,j})^r = \lambda_i^r \lambda_j^r (A^{*r})_{i,j}.$$

On sait que la matrice A^{*r} est positive donc, d'après le critère de la question 3, la matrice B^{*r} est positive aussi. C'est vrai pour tout $r > 0$ donc la matrice B est infiniment divisible.

11. On suppose que pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, la matrice $A^{*\frac{1}{m}}$ est positive. Comme le signale le préambule de la troisième partie, la propriété de la question 8.b permet d'en déduire que pour tout m dans $\mathbb{N}^*$ et tout p dans $\mathbb{N}^*$, la matrice $A^{*\frac{p}{m}}$ est positive. Autrement dit, pour tout nombre rationnel q strictement positif, la matrice A^{*q} est positive.

Soit $r > 0$ quelconque. On sait qu'il existe une suite $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de rationnels strictement positifs qui converge vers r . Prenons un vecteur colonne X .

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la matrice A^{*q_k} est positive donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^{q_k} x_i x_j \geq 0.$$

On fait tendre k vers $+\infty$ et on obtient

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^r x_i x_j \geq 0,$$

c'est-à-dire ${}^t X A^{*r} X \geq 0$.

C'est vrai pour tout X donc la matrice A^{*r} est positive. C'est vrai pour tout $r > 0$ donc la matrice A est infiniment divisible.

12.a. On trouve $\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$. Le résultat de la question 6 permet d'en déduire que la matrice C est positive.

12.b. On effectue le changement de variable $u = t\alpha$.

12.c. Classique. Même la propriété admise. On notera qu'il eût été plus astucieux d'employer la notation $\langle u, v \rangle_r$ plutôt que $\langle u, v \rangle$, puisque ce produit scalaire dépend de r . C'est cependant négligeable en regard des autres bugs de cet énoncé.

12.d. Soit $r > 0$. La matrice C^{*r} a pour coefficients les nombres

$$c_{i,j}^r = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda_i} e^{-t\lambda_j} t^{r-1} dt = \langle u_i, u_j \rangle_r,$$

en posant $u_k(t) = e^{-t\lambda_k} / \sqrt{\Gamma(r)}$. La propriété de la question 6 prouve donc que la matrice C^{*r} est positive.

C'est vrai pour tout $r > 0$ donc la matrice C est infiniment divisible.

13.a. D'après la formule de la question 2.c, on peut affirmer que $k_{i,j}$ est la limite quand m tend vers $+\infty$ de l'expression

$$k_{i,j}^{(m)} = \frac{m! m^{\lambda_i + \lambda_j + 1}}{(\lambda_i + \lambda_j + 1) \cdots (\lambda_i + \lambda_j + m)} \times \frac{(\lambda_i + 1) \cdots (\lambda_i + 1 + m)}{m! m^{\lambda_i + 1}} \times \frac{(\lambda_j + 1) \cdots (\lambda_j + 1 + m)}{m! m^{\lambda_j + 1}}.$$

Après simplification de $m!$ et des puissances de m , cette expression se réécrit

$$k_{i,j}^{(m)} = \frac{1}{m.m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p}.$$

13.b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La matrice $\left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + p} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est infiniment divisible d'après les résultats de la question 12 en remplaçant λ_k par $\lambda_k + p/2$. Le résultat de la question 10 (où l'on remplace les λ_k par $\lambda_k + p$) permet d'en déduire que la matrice

$$\left(\frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

est infiniment divisible.

Là, on apprécierait bien d'avoir eu une question intermédiaire qui ferait justifier que l'ensemble des matrices infiniment divisibles est stable par le produit de Hadamard. C'est en fait une conséquence immédiate du résultat de la question 8.b : si A et B sont infiniment divisibles, alors pour tout $r > 0$, les matrices A^{*r} et B^{*r} sont positives et il suffit de remarquer l'égalité $(A * B)^{*r} = (A^{*r}) * (B^{*r})$ pour conclure que cette matrice est positive.

On en déduit que la matrice de coefficients $\prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p}$ est infiniment divisible. Exploitions encore le résultat de la question 10 en remplaçant les λ_k par $1/\sqrt{m.m!}$. On en déduit que la matrice de coefficients $k_{i,j}^{(m)}$ est infiniment divisible.

Pour finir, il reste à effectuer un passage à la limite de la même manière qu'à la question 11. On prend $r > 0$ et X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, on connaît l'inégalité

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (k_{i,j}^{(m)})^r x_i x_j \geq 0.$$

On fait tendre l'entier m vers $+\infty$ et on obtient

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (k_{i,j})^r x_i x_j \geq 0.$$

C'est vrai pour toute colonne X donc ceci prouve que la matrice K^{*r} est positive. C'est vrai pour tout $r > 0$ donc la matrice K est infiniment divisible.

14. Prenons un vecteur colonne X tel que $x_1 + \dots + x_n$ soit nul. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction

$$f : r \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r.$$

Pour tout $r > 0$, on observe l'égalité $f(r) = {}^t X C^{*r} X$, où C est la matrice de coefficients $1/(\lambda_i + \lambda_j)$. D'après les résultats de la question 12, la matrice C^{*r} est positive donc $f(r)$ est positif. On trouve en outre

$$f(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0.$$

Pour tout $r > 0$, le taux d'accroissement $f(r)/r$ est donc positif. En faisant tendre r vers 0, on en déduit que $f'(0)$ est positif. La fonction f' est donnée par

$$\forall r \geq 0, \quad f'(r) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (-\ln(\lambda_i + \lambda_j)) \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r.$$

L'inégalité $f'(0) \geq 0$ s'écrit donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{i,j} \geq 0.$$

C'est vrai pour tout vecteur colonne X de somme nulle donc la matrice A est conditionnellement positive.

15. On fait l'hypothèse (ii). Soit X une colonne de somme nulle. Prenons $\varepsilon > 0$. D'après (ii), on peut lui associer un $\lambda > 0$ tel que la matrice $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ soit positive.

On en déduit l'inégalité ${}^t X (B + \varepsilon I_n + \lambda J) X \geq 0$. Calculons cette quantité

$${}^t X (B + \varepsilon I_n + \lambda J) X = {}^t X B X + \varepsilon \|X\|^2 + \lambda \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j.$$

Comme on l'a vu à la question précédente, la double somme des $x_i x_j$ est nulle. Il reste donc

$${}^t X B X + \varepsilon \|X\|^2 \geq 0.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc on peut faire tendre ε vers 0 dans cette inégalité et obtenir ${}^t X B X \geq 0$.

C'est vrai pour toute colonne X de somme nulle donc la matrice B est conditionnellement positive. On a prouvé que (ii) implique (i).

16.a. On refait le raisonnement de la question 14, qui en est un cas particulier (encore un beau bug de conception). On fixe une colonne X de somme nulle. On définit la fonction

$$f : r \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (a_{i,j})^r.$$

La fonction f est à valeurs positives et elle s'annule en 0. On prouve que $f'(0)$ est positif et cela s'écrit

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \ln(a_{i,j}) \geq 0.$$

C'est vrai pour toute colonne X de somme nulle donc la matrice $(\ln(a_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ est conditionnellement positive.

16.b. Prenons une colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Prenons $r > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On lui associe un $\lambda > 0$ comme à la question 15. Notons $c_{i,j}$ les coefficients de la matrice $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ (il serait plus adéquat de les noter $c_{i,j}(\varepsilon)$ mais tant pis). Le développement en série entière de l'exponentielle donne

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{r c_{i,j}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (c_{i,j})^k \right).$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la matrice C^{*k} est positive (y compris pour $k = 0$ — je le laisse en exercice) donc tous les termes dans la somme ci-dessus sont positifs. Remarquons maintenant l'écriture

$$e^{r c_{i,j}} = e^{r b_{i,j}} \times e^{r \varepsilon \delta_{i,j}} \times e^{r \lambda},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. En simplifiant par la constante strictement positive $e^{r \lambda}$, il vient

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{r b_{i,j}} e^{r \varepsilon \delta_{i,j}} \geq 0.$$

Cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$ donc on peut faire tendre ε vers 0, ce qui donne

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{r b_{i,j}} \geq 0.$$

La matrice $(\exp(r b_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ est donc positive.

17.a. Pour tout couple (i, j) d'indices entre 1 et n , posons $b_{i,j} = -|z_i - z_j|^2$. Prouvons que la matrice B ainsi créée est conditionnellement positive.

Prenons une colonne X de somme nulle. On trouve

$${}^t \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{X} = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_i - z_j|^2 = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_i|^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_j|^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j z_i \bar{z}_j.$$

Traitons chaque somme séparément

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_i|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i |z_i|^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) = 0.$$

De même, la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j |z_j|^2$ est nulle. Il reste

$${}^t \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{X} = 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i z_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n x_j \bar{z}_j \right) = 2 \left| \sum_{i=1}^n x_i z_i \right|^2 \geq 0.$$

C'est vrai pour toute colonne X de somme nulle donc la matrice B est conditionnellement positive. D'après 16.b, pour tout $r > 0$, matrice de coefficients $\exp(r b_{i,j})$ est positive. Autrement dit, la matrice de coefficients $e^{b_{i,j}}$ est infiniment divisible. C'est la matrice de coefficients $e^{-|z_i - z_j|^2}$.

17.b. Voilà une question fort difficile. Ça m'a pris un certain temps pour repérer les astuces. Pour la première partie de la question, rappelons cette propriété du cours : pour tout $\alpha > 0$, la fonction $u \mapsto e^{-\alpha u}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha}.$$

Prenons $t > 0$. Pour tout $u > 0$, la matrice $(e^{-u|z_i - z_j|^2 - ut})_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive (on utilise le résultat de la question précédente et celui de la question 10 avec $\lambda_k = e^{-ut/2}$).

Soit X un vecteur colonne. Pour tout $u > 0$, on obtient l'inégalité

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{-u|z_i - z_j|^2 - ut} \geq 0.$$

Par croissance de l'intégrale et par linéarité de l'intégrale, on en déduit l'inégalité

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \int_0^{+\infty} e^{-u|z_i - z_j|^2 - ut} dt \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \times \frac{1}{|z_i - z_j|^2 + t} \geq 0.$$

C'est vrai pour tout vecteur colonne X donc la matrice de coefficients $\frac{1}{|z_i - z_j|^2 + t}$ est positive.

Pour la deuxième partie, utilisons l'astuce classique $\frac{|z_i - z_j|^2}{|z_i - z_j|^2 + t} = 1 - \frac{t}{|z_i - z_j|^2 + t}$.

Prenons une colonne X de somme nulle. Soit $t > 0$.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{-t^{-1/2}|z_i - z_j|^2}{|z_i - z_j|^2 + t} = -t^{-1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j + t^{1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \times \frac{1}{|z_i - z_j|^2 + t}.$$

La deuxième somme est positive (on l'a prouvé dans la première partie de cette question). La première somme est nulle (c'est le carré de la somme des x_k). En intégrant, on obtient

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left(- \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt \right) \geq 0.$$

C'est vrai pour toute colonne X de somme nulle donc la matrice de coefficients $-\int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt$ est conditionnellement positive.

Oh wait ! C'est bien beau d'invoquer la linéarité et la croissance de l'intégrale, mais il faut justifier que les intégrales considérées existent. Allons-y, mieux vaut tard que jamais.

Si $z_i = z_j$, l'intégrale considérée existe parce qu'on intègre la fonction nulle.

Supposons maintenant que z_i et z_j sont distincts. Le nombre $|z_i - z_j|^2$ est donc strictement positif. La fonction $f_{i,j} : t \mapsto t^{-1/2}/(t + |z_i - z_j|^2)$ est alors définie et continue sur $]0, +\infty[$ (et positive).

Quand t tend vers 0, on trouve l'équivalent

$$f_{i,j}(t) \sim \frac{1}{|z_i - z_j|^2} \times \frac{1}{t^{1/2}}.$$

On sait que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ est convergente (car $1/2 < 1$). Le critère des équivalents permet d'en déduire que la fonction $f_{i,j}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Quand t tend vers $+\infty$, on trouve l'équivalent

$$f_{i,j}(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}.$$

On sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est convergente (car $3/2 > 1$). Le critère des équivalents permet d'en déduire que la fonction $f_{i,j}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Cette fois, tout a été justifié.

17.c. Calculons les intégrales de la question précédente. Notons

$$I(i, j) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt.$$

Si $z_i = z_j$, on trouve bien sûr $I(i, j) = 0$. On suppose maintenant que z_i et z_j sont distincts. On commence par effectuer le changement de variable $u = \sqrt{t}$, qui donne

$$I(i, j) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{|z_i - z_j|^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2} du.$$

Il n'y a plus qu'à faire apparaître la dérivée d'une arctangente.

$$I(i, j) = 2|z_i - z_j| \times \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{u^2}{|z_i - z_j|^2} + 1} \times \frac{du}{|z_i - z_j|} = 2|z_i - z_j| \times \frac{\pi}{2} = \pi|z_i - z_j|.$$

On remarque que l'égalité $I(i, j) = \pi|z_i - z_j|$ est encore valable si z_i et z_j sont égaux.

Ainsi, le résultat de la question 17.b est que la matrice de coefficients $-\pi|z_i - z_j|$ est infiniment divisible. Le résultat de la question 16.b permet d'en déduire que la matrice de coefficients $e^{-\pi|z_i - z_j|}$ est infiniment divisible.

Pour tout $r > 0$, la matrice de coefficients $e^{-\pi r|z_i - z_j|}$ est positive. Quand r décrit $]0, +\infty[$, le nombre πr décrit le même intervalle donc pour tout $s > 0$, la matrice de coefficients $e^{-s|z_i - z_j|}$ est positive.

Finalement, on a prouvé que la matrice $(e^{-|z_i - z_j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible.
