

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y \tan(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 2. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 4. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \cos(nx)$ sur \mathbb{R} .

Quelles sont les solutions 2π -périodiques ?

Exercice 5. (*) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$.

Exercice 6. (*) Trouver la solution sur \mathbb{R} du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = e^{-|x|} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. (*) Soient ω et ω_0 dans $]0, +\infty[$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x)$ sur \mathbb{R} .

Exercice 8. (*) Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} . Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

Exercice 9. ()** On considère une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on suppose que la fonction $f'' + f$ ne prend que des valeurs positives.

Pour tout x réel, démontrer l'inégalité $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

Pour cela, on pourra exprimer f à l'aide de la fonction $g = f'' + f$ en exploitant le calcul de l'exercice précédent.

Systemes différentiels linéaires

Exercice 10. ()** Résoudre les systèmes différentiels linéaires suivants

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases} ; \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X.$$

Exercice 11. (*) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'' = 5x + y \\ y'' = -7x - 3y. \end{cases}$$

Exercice 12. ()** Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} (1+t^2)x' = tx + y \\ (1+t^2)y' = -x + ty. \end{cases}$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + iy$.

Solution de l'exercice 12. Soit (x, y) un couple de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , à valeurs réelles. Posons $z = x + iy$. Pour tout t , on observe l'égalité

$$(tx(t) + y(t)) + i(-x(t) + ty(t)) = (t - i)x(t) + (1 + it)y(t) = (t - i)z(t).$$

Le système à résoudre équivaut donc à l'équation différentielle

$$z' = \frac{t - i}{1 + t^2} z.$$

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{t - i}{1 + t^2}$ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) - i \operatorname{Arctan}(t)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (x, y) soit solution du système est

$$\exists C \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = C \exp\left(\frac{1}{2} \ln(1 + t^2) - i \operatorname{Arctan}(t)\right).$$

Le calcul donne

$$\exp\left(\frac{1}{2} \ln(1 + t^2) - i \operatorname{Arctan}(t)\right) = \sqrt{1 + t^2} e^{-i \operatorname{Arctan}(t)} = 1 - it.$$

La condition nécessaire et suffisante se réécrit

$$\exists C \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = C \times (1 - it).$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, tout ceci se réécrit

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x(t) = A + Bt \\ y(t) = B - At. \end{cases}$$

Équations différentielles linéaires variées

Exercice 13. ()** Pour chacune des équations différentielles suivantes, trouver les solutions développables en série entière.

$$(1) \quad 4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 \quad ; \quad (2) \quad xy'' + 2y' - xy = 0 \quad ; \quad (3) \quad x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1.$$

Exercice 14. (*) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ sur \mathbb{R} .

Pour cela, on considérera la fonction $z : t \mapsto y(\ln(t))$ et on trouvera une condition nécessaire et suffisante sur la fonction z pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E).

Exercice 15. ()** Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^3y'' - 2xy' + 3 = 0$ sur $]0, +\infty[$ en considérant la fonction auxiliaire $z : x \mapsto xy'(x) + y(x)$.

Exercice 16. ()** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = xf(-x).$$

Exercice 17. ()** On note (E) l'équation différentielle

$$x^4y'' + 2x^3y' - y = 0.$$

a. Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on introduit la fonction $g : t \mapsto f(1/t)$. Montrer que f est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, la fonction g est solution d'une certaine équation différentielle plus simple, à préciser.

b. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

c. Résoudre également (E) sur $] -\infty, 0[$ puis sur \mathbb{R} .

Exercice 18. (*) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Trouver ensuite une équation différentielle d'ordre 1 dont cette fonction est solution puis en déduire son développement en série entière.

Exercice 19. ()** Montrer que l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

possède au moins une solution 2π -périodique. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.

Exercice 20. (*)** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement positive et croissante sur \mathbb{R} .

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + \varphi(x)y = 0$ possèdent une infinité de zéros dans $[0, +\infty[$.

Pour cela, on considérera une solution f et on supposera qu'il existe $a \geq 0$ tel que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$. On introduira alors une solution g de l'équation différentielle $y'' + \varphi(a)y = 0$ telle que $g(a) = 0$ et $g'(a) > 0$ et on étudiera la fonction $w = f'g - fg'$.

Solution de l'exercice 20. Notons (E) l'équation différentielle

$$y'' + \varphi(x)y = 0.$$

Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $a \geq 0$ tel que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$. Considérons alors la fonction

$$g : x \mapsto \sin(\sqrt{\varphi(a)}(x-a)).$$

Cette fonction est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + \varphi(a)y = 0$ et vérifie les relations

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = \sqrt{\varphi(a)} > 0.$$

On définit la fonction $w = f'g - fg'$. Cette fonction est dérivable. Sa dérivée est donnée par

$$w' = (f''g + f'g') - (fg'' + f'g') = f''g - fg''.$$

En exploitant les équations différentielles dont f et g sont solutions, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w'(x) = (-\varphi(x) + \varphi(a))f(x)g(x).$$

Posons $b = a + \pi/\sqrt{\varphi(a)}$. La fonction g est positive sur $[a, b]$, de même que f . La croissance de φ donne donc

$$\forall x \in [a, b], \quad w'(x) \leq 0.$$

La fonction w est donc décroissante sur $[a, b]$. On trouve

$$w(a) = -f(a)g'(a) < 0 \quad \text{et} \quad w(b) = -f(b)g'(b).$$

Le calcul donne $g'(b) = -\sqrt{\varphi(a)}$ donc $w(b) > 0$. Les inégalités

$$w(a) < 0 \quad \text{et} \quad w(b) > 0$$

contredisent la décroissance de w . Ces contradictions prouvent que pour tout $a \geq 0$, il est impossible que f soit strictement positive sur $[a, +\infty[$.

De même, pour tout $a \geq 0$, il est impossible que $-f$ soit strictement négative sur $[a, +\infty[$.

Si f possédait seulement un nombre fini de zéros (voire aucun) sur $[0, +\infty[$, il existerait $a \geq 0$ tel que f ne s'annulerait en aucun point de $[a, +\infty[$. La fonction étant continue et à valeurs réelles sur cet intervalle, elle garderait un signe constant (strict) sur $[a, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires). On vient de voir que c'est impossible donc f possède une infinité de zéros sur $[0, +\infty[$.

Exercice 21. ()** Pour tout λ réel, résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{(nx + \lambda)}{x(x + 1)}y = 0.$$

En déduire les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi_n : P \mapsto X(X + 1)P' - nXP$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
