

Régularité des fonctions

Exercice 1. (*) On pose $f(x, y) = 0$ si $y = 0$ et $f(x, y) = y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ sinon.

Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existent mais pas $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$.

Solution de l'exercice 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on observe la majoration

$$|f(x, y)| \leq |y| + |x|.$$

Cette majoration est également valable si $y = 0$. Elle est donc valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le majorant a une limite nulle en $(0, 0)$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit la limite suivante

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^*$. On trouve

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = y.$$

Cette égalité est valable également si $y = 0$. Elle est donc valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

Prenons maintenant x non nul. On va voir que $f(x, y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 (en restant non nul). Pour cela, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{et} \quad z_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Les suites $(y_n)_{n \geq 1}$ et $(z_n)_{n \geq 1}$ convergent vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$f(x, y_n) = y_n \quad \text{et} \quad f(x, z_n) = z_n + x.$$

Les suites $(f(x, y_n))_{n \geq 1}$ et $(f(x, z_n))_{n \geq 1}$ convergent donc vers 0 et vers x respectivement. Ces deux limites sont distinctes donc $f(x, y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0.

À plus forte raison, la limite double $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ n'existe pas.

Exercice 2. (*) On pose $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f(0, 0) = 0$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution de l'exercice 2. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$; la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Par composition, la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Le fonction f aussi.

Pour tout (x, y) non nul, on observe la domination

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2) |\ln(x^2 + y^2)|.$$

On sait que $t \ln(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 donc $(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $f(x, y)$ tend vers 0 (c'est-à-dire vers $f(0, 0)$) quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

La fonction f est donc continue en $(0, 0)$.

On en déduit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Existence des dérivées partielles en l'origine. On définit la fonction partielle

$$f_1 : x \mapsto f(x, 0)$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on étudie sa dérivabilité en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \ln(x^2) = 2x \ln(|x|).$$

Ce taux d'accroissement tend vers 0 quand x tend vers 0. La fonction f_1 est donc dérivable en 0 avec $f'_1(0) = 0$.

On a prouvé que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Continuité des dérivées partielles en l'origine. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, le calcul formel donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

On utilise alors la majoration

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} |\ln(x^2 + y^2)| + 2|x|.$$

Le majorant tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. On en déduit que $\partial f / \partial x$ admet une limite nulle en l'origine. Cette fonction est donc continue en l'origine.

Idem pour $\partial f / \partial y$.

La fonction f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles d'ordre 1. De plus, ses deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. (*) On pose $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution de l'exercice 3. Par les théorèmes de stabilité, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Existence des dérivées partielles en l'origine. On considère la fonction partielle $f_1 : x \mapsto f(x, 0)$ et on étudie sa dérivabilité en 0.

Cette fonction est la fonction nulle donc elle est dérivable en 0 avec $f'_1(0) = 0$.

On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0. Idem pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Continuité des dérivées partielles en l'origine.

Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, le calcul formel donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \times \frac{4x^3(x^4 + y^2) - x^4 \times 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{4x^3 y^3}{(x^4 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4 \times \frac{(x^4 + y^2) - y \times 2y}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^4(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2}.$$

Pour tout $x \neq 0$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 1$, ce qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

La fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est donc pas continue en $(0, 0)$. La fonction f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Bonus. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ mais c'est assez difficile à voir.

Prenons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et supposons x non nul. Afin d'homogénéiser les rôles de x et de y , posons $\lambda = y/x^2$. On obtient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4x^3(\lambda^3 x^6)}{(x^4 + (\lambda x^2)^2)^2} = \frac{\lambda^3}{(1 + \lambda^2)^2} x.$$

Une simple étude de la fonction $u : t \mapsto \frac{t^3}{(1 + t^2)^2}$ montre alors que cette fonction est bornée : sa valeur absolue admet un maximum en $\sqrt{3}$, lequel est égal à $3\sqrt{3}/16$ (constante notée C dans la suite).

Ainsi, si x n'est pas nul, on obtient

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq C \times |x|.$$

Cette inégalité est vraie aussi si x est nul (la dérivée partielle est nulle dans ce cas). Par le théorème des gendarmes, on en déduit que cette dérivée partielle nulle a une limite nulle en $(0, 0)$.

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(0, 0)$.

Exercice 4. ()** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x, y) = \frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier l'expression $1 - q(x, y)^2$.
- En déduire que la fonction $f : (x, y) \mapsto \text{Arccos}(q(x, y))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Sur un ensemble $\mathcal{D}$ à préciser, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f .
- En déduire une simplification de l'expression $f(x, y)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. ()** On considère la fonction $\det$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, interprétée comme une fonction de n^2 variables.

- Déterminer la différentielle de cette fonction en I_n .
- Déterminer la différentielle de cette fonction en une matrice A quelconque.

Extremums

Exercice 6. (*) On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$.

- Représenter l'ensemble $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ; 1 - x - y \geq 0\}$.
- Montrer que f admet sur D un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 7. (*) Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2) \exp(-x^2 - y^2)$.

Exercice 8. (*) Déterminer les extremums sur $[0, \pi]^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$.

Solution de l'exercice 8. Le carré $[0, \pi]^2$ est fermé et borné (c'est une boule fermée pour la norme infinie). La fonction f est continue sur ce fermé borné donc elle y possède un maximum et un minimum.

Recherche des points critiques. Introduisons le carré ouvert $D =]0, \pi[^2$. C'est une boule ouverte pour la norme infinie donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et ses dérivées partielles d'ordre 1 sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x) + \cos(x + y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(y) + \cos(x + y).$$

Résolvons l'équation $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ par équivalences. On prend $(x, y) \in]0, \pi[^2$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \cos(x) + \cos(x + y) = 0 \\ \cos(y) + \cos(x + y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x + y) = -\cos(x) \\ \cos(y) = \cos(x) \end{cases}$$

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $]0, \pi[$ donc décroissante sur cet intervalle.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \cos(x + y) = -\cos(x) \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(2x) = -\cos(x) \\ y = x \end{cases}$$

L'équation $\cos(2x) = -\cos(x)$ se réécrit $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$. Elle équivaut à

$$\cos(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

On a pris x dans $]0, \pi[$ donc l'égalité $\cos(x) = -1$ est impossible et l'égalité $\cos(x) = 1/2$ équivaut à $x = \pi/3$. On obtient finalement l'équivalence

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

Dans l'ouvert $(]0, \pi[)^2$, si f admet un extremum local, c'est forcément en un point critique. Les extremums de f sur $[0, \pi]^2$ sont donc atteints en des éléments de $([0, \pi]^2 \setminus]0, \pi[^2) \cup \{(\pi/3, \pi/3)\}$.

Étude des valeurs prises par f sur la partie restante. Sur la face sud du carré, on trouve

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x, 0) = 2 \sin(x).$$

Les valeurs prises par f sur ce côté du carré sont les éléments de $[0, 2]$. Idem sur la face ouest.

Sur la face nord du carré, on trouve

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x, \pi) = 0.$$

Idem sur la face est. On trouve enfin

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} > \frac{5}{2} > 2.$$

Finalement, le maximum de f sur $[0, \pi]^2$ vaut $3\sqrt{3}/2$ et son minimum est 0.

Exercice 9. (*) Trouver les extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 - xy$ sur l'ensemble D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Solution de l'exercice 9. L'ensemble D est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (par exemple, par caractérisation séquentielle). La fonction f est continue sur D donc elle admet un maximum et un minimum sur cet ensemble.

Considérons l'ensemble

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

Cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (intersection de trois demi-plans ouverts) et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc les éventuels extremums locaux de f sur Δ sont atteints en des points critiques de f .

Le calcul donne

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (2x - 3y, 2y - 3x).$$

On observe que l'unique point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ est $(0, 0)$, si bien que f n'a aucun extremum local dans Δ .

Les extremums globaux de f sur D sont donc atteints en des points de $D \setminus \Delta$.

Étude sur les faces sud et ouest. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x, 0) = x^2$. Les valeurs prises par f sur le côté sud sont les éléments de $[0, 1]$.

Idem sur le côté est.

Étude sur l'hypoténuse. L'hypoténuse du triangle étudié est paramétrée par

$$\{(t, 1 - t) ; t \in [0, 1]\}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f(t, 1 - t) = (2t - 1)^2 - t(1 - t) = 5t^2 - 5t + 1 = 5\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Les valeurs prises par $f(t, 1 - t)$ quand t décrit $[0, 1]$ sont donc les éléments de $[-1/4, 1]$.

Finalement, le maximum de f sur D est 1 et le minimum est $-1/4$.

Exercice 10. ()** On définit sur $[0, +\infty[^2$ une fonction f en posant $f(0, 0) = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + y)(1 + x)(1 + y)} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

- a. Montrer que cette fonction est continue.
- b. Trouver les points critiques de f dans l'ouvert $(]0, +\infty[)^2$.
- c. Pour tout $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$ tel que $x + y \geq 8$, montrer la majoration $f(x, y) < 1/8$.
- d. Déterminer les extremums de la fonction f sur $([0, +\infty[)^2$.

Exercice 11. (*) On pose $D = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ et on définit $f : (x, y) \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2} \cos(y)$ sur D .

- a. Déterminer les points critiques de f sur une région Δ à préciser.
- b. Pour tout $(x, y) \in D$, prouver la minoration $f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leq x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4$.
- c. Étudier les extremums de f sur D .

Solution de l'exercice 11. a. On considère l'ensemble

$$\Delta =]-1, 1[\times \mathbb{R}.$$

Cet ensemble s'écrit $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$. La valeur absolue est continue donc Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ , avec

$$\forall (x, y) \in \Delta, \nabla f(x, y) = \left(2x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cos(y), \sqrt{1 - x^2} \sin(y) \right).$$

L'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ équivaut à $\sin(y) = 0$, ce qui équivaut à l'existence d'un entier k tel que $y = k\pi$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, k\pi) = 2x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}(-1)^k.$$

Si k est pair, cette équation équivaut à $x = 0$.

Si k est impair, cette équation équivaut à

$$(x = 0) \quad \text{ou} \quad (\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}),$$

c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}/2$ ou $x = -\sqrt{3}/2$.

Les points critiques de f sont donc les points de la forme $(0, k\pi)$ où k décrit $\mathbb{Z}$ et les points de la forme $(\pm\sqrt{3}/2, (2p+1)\pi)$ où p décrit $\mathbb{Z}$.

b. Un premier calcul donne

$$f(\sqrt{3}/2, \pi) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{5}{4}.$$

Soit $(x, y) \in D$. La minoration $\cos(y) \geq -1$ donne alors

$$f(x, y) \leq x^2 + \sqrt{1 - x^2} \quad \text{donc} \quad f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leq x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 5/4.$$

c. Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 + \sqrt{1 - x^2}$. Cette fonction est définie et continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$. D'autre part, elle est paire. Il suffit donc d'étudier ses variations sur $[0, 1]$ pour connaître les valeurs qu'elle prend.

Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x(2\sqrt{1 - x^2} - 1)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On observe que φ' est positive sur $[0, \sqrt{3}/2]$ et négative sur $[\sqrt{3}/2, 1]$.

La fonction φ est donc croissante sur $[0, \sqrt{3}/2]$ et décroissante sur $[\sqrt{3}/2, 1]$ (en utilisant la continuité en 1). Elle est donc maximale en $\sqrt{3}/2$, où elle vaut $5/4$.

La majoration de la question précédente donne donc

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) - f(\sqrt{3}/2, \pi) \leq 0.$$

La fonction f admet donc la valeur $5/4$ comme maximum.

De l'autre côté, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on connaît la majoration $\cos(y) \leq 1$, ce qui donne

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) \geq x^2 - \sqrt{1 - x^2} \geq -1 = f(0, 0).$$

La fonction f admet donc la valeur -1 comme minimum.

Remarque. Au bout du compte, la recherche des points critiques n'a servi à rien. Il y avait juste à encadrer $\cos(y)$ entre -1 et 1 puis à étudier les variations de φ et de $x \mapsto x^2 - \sqrt{1 - x^2}$, ces dernières étant immédiates.

Exercice 12. ()** Dans cet exercice, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On se donne une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur B de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction

$$f : X \mapsto \frac{1}{2} X^T \cdot A \cdot X - B^T \cdot X$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

a. Exprimer le gradient de f .

b. Si A est symétrique définie positive, montrer que f possède un minimum et qu'il est atteint en un unique point.

c. (***) Montrer que f possède un minimum si et seulement si la matrice A est symétrique positive et B est dans l'image de A .

Équations aux dérivées partielles

Exercice 13. ()** On note Ω le complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On fixe α dans $\mathbb{R}$.

Dire que la fonction f est *positivement homogène* de degré α signifie qu'elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Exercice 14. ()** Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

à l'aide du changement de variables $(u, v) = (xy, x/y)$.

Exercice 15. ()** Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ telles que la fonction $\hat{f} : (x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x}{y+z}\right)$ soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul) sur $]0, +\infty[^3$.

Exercice 16. ()** On note U l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, et on définit sur U la fonction

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right).$$

a. Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer la fonction $\partial^2 F / \partial x_i^2$.

b. En déduire une expression du laplacien de F , défini par $\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que la fonction F soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul).

Solution de l'exercice 16. a. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on trouve

$$\forall x \in U, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right).$$

Une nouvelle dérivation donne pour tout $x \in U$ la relation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) - \frac{x_i^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) + \frac{x_i^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} f'' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

b. Soit $x \in U$. En sommant les quantités trouvées ci-dessus, on obtient

$$\Delta F(x) = \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) + f'' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right).$$

c. Quand x parcourt U , la quantité $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ décrit l'intervalle $]0, +\infty[$. On en déduit l'équivalence

$$\Delta F = 0 \iff \forall r > 0, \quad \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r) = 0.$$

Cette condition peut être interprétée comme une équation différentielle en f' . Elle équivaut à

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall r > 0, \quad f'(r) = c \times r^{-n+1}.$$

Si $n = 2$, cette condition équivaut à

$$\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall r > 0, \quad f(r) = c \ln(r) + d.$$

Si $n \neq 2$, cette condition équivaut à

$$\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall r > 0, \quad f(r) = \frac{c}{2-n} r^{-n+2} + d.$$