Niveaux profonds du puits infini

Plaçons-nous dans la situation où $\boxed{V_0 \gg \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}}$

(qui représente le fondamental du puits ∞ et un majorant du niveau fondamental ici).

$$a \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \gg \pi \quad \text{ou} \quad r_0 = k_0 a \gg \pi$$

Le rayon du cercle est très grand et il existe un grand nombre d'états stationnaires. Concentrons-nous sur les états possédant une énergie très inférieure à V_0, $\boxed{E_n \ll V_0}$ bien au fond du puits. Ils correspondent graphiquement aux solutions $u^2+v^2=r_0^2$ pour lesquelles $u = ka$ est très inférieur à r_0.

$u \ll r_0$ donc $v \simeq r_0$ ie $q \simeq k_0$

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \qquad q \approx \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \qquad q \approx k_0 \quad \text{et} \quad v \approx r_0 = k_0 a$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad k \ll q \qquad u \ll v$$

On voit sur le graphique que u_n très proche de $n\pi$

- $n = 1, 3, 5, 7 \ldots$ états pairs $n = 2p+1$

$$v = u \tan \frac{u}{2} \qquad u = n\pi - \varepsilon \qquad v \simeq v_0$$

$$v_0 \simeq (n\pi - \varepsilon) \tan\left(p\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\simeq (n\pi - \varepsilon) \frac{\cos \varepsilon/2}{\sin \varepsilon/2} \approx \frac{(n\pi - \varepsilon)}{\varepsilon/2}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} v_0 = n\pi - \varepsilon \longrightarrow \varepsilon \simeq \frac{n\pi}{\frac{v_0}{2}+1} \simeq \frac{2n\pi}{v_0+2}$$

$$u = n\pi - \varepsilon = n\pi - \frac{2n\pi}{v_0+2} = n\pi\left(1-\frac{2}{v_0+2}\right) = n\pi \frac{v_0}{v_0+2}$$

$$u \simeq n\pi \frac{1}{1+\frac{2}{v_0}} \qquad \boxed{u \simeq \frac{n\pi}{1+\frac{2}{k_0 a}}}$$

- états antisym $\qquad n = 2, 4, 6, 8 \dots$

$$v = -\frac{u}{\tan u/2} \qquad u = 2p\pi - \varepsilon$$

$$r_0 \simeq -\frac{2p\pi - \varepsilon}{\tan(p\pi - \varepsilon/2)} = -\frac{n\pi - \varepsilon}{-\varepsilon/2} = (n\pi - \varepsilon)\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon r_0 = 2n\pi - 2\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{2n\pi}{r_0+2}$$ m̂ expression

$$\boxed{u \simeq \frac{n\pi}{1+\frac{2}{k_0 a}}}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} u_n^2 \qquad E_n \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{k_0 a}\right)^2}$$

$$\boxed{a_{eff} = a + \frac{2}{k_0}} \qquad \boxed{E_n \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m a_{eff}^2}}$$