

## Mesures et incertitudes

Toute mesure présente une certaine variabilité, l'objectif ici est d'estimer cette variabilité avec les outils du programme de travaux pratiques en PC<sup>1</sup> et quelques compléments parfois utiles en TIPE.

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Variabilité et incertitude-type</b>	<b>1</b>
1.1	Variabilité d'une mesure . . . . .	1
1.2	Définition de l'incertitude-type . . . . .	2
1.3	Accord sur les chiffres significatifs . . . . .	2
1.4	Comparer deux mesures . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)</b>	<b>3</b>
2.1	Intérêt de la répétition d'une mesure . . . . .	3
2.2	Résultat d'un traitement statistique d'une mesure . . . . .	4
2.3	Hors-programme mais peut servir en TIPE : coefficient de Student . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)</b>	<b>4</b>
3.1	Estimation de la plage de valeurs possibles . . . . .	4
3.2	Ne pas surestimer la précision d'une mesure par graduation ou curseur . . . . .	5
3.3	Lien entre incertitude-type et plage de valeur (incertitudes type B) . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Les incertitudes-type composées (propagation des incertitudes)</b>	<b>5</b>
4.1	Cas simples : calculs au programme . . . . .	6
4.2	Cas général : simulation Monte-Carlo . . . . .	6
4.3	Cas général : calcul hors-programme mais peut servir en TIPE . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Exploitation d'une régression linéaire</b>	<b>7</b>
5.1	Critères qualitatifs de validité . . . . .	8
5.1.1	Modèle non validé car répartition non aléatoire . . . . .	8
5.1.2	Modèle non validé car incertitudes mal estimées . . . . .	9
5.1.3	Restriction du domaine d'ajustement . . . . .	9
5.2	Limite du coefficient de corrélation . . . . .	10
5.3	Ajustement par une loi non linéaire . . . . .	11
5.4	Estimation Monte-Carlo des incertitudes des paramètres d'un ajustement . . . . .	11

## 1 Variabilité et incertitude-type

### Savoir-faire

- Associer l'incertitude-type à l'écart-type d'une distribution.
- Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
- Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.

### 1.1 Variabilité d'une mesure

Considérons par exemple une mesure de célérité d'ultrasons dans l'air répétée un grand nombre de fois. La figure 1 présente une simulation de la variabilité des mesures pour un grand nombre d'expérience  $N$ .

★ On remarque un étalement des mesures  $\{x_i\}$ . La distribution peut se caractériser par les notions de **moyenne**  $\bar{x}$  et **écart-type**  $u(x)$  :

1. Ce polycopié est très inspiré d'un document produit par Maxime Champion : <https://mchampion.fr>

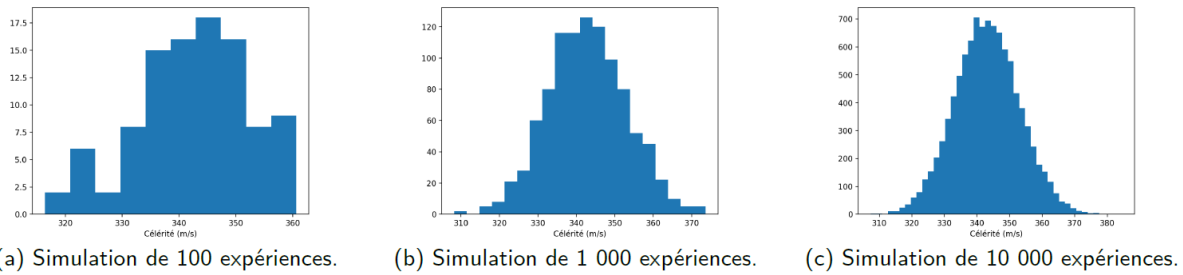


FIGURE 1 – Vers la distribution gaussienne.

$$\text{moyenne : } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \text{écart-type : } u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

★ Quand  $N$  augmente, la distribution de mesures tend vers une courbe « en cloche ». C'est plus précisément une **gaussienne**, fonction très courante dès qu'interviennent des processus aléatoires en physique.

def : Une **distribution gaussienne normalisée** (d'intégrale valant 1) de valeur moyenne  $\bar{x}$  et écart-type  $u(x)$  est :

$$f(x) = \frac{1}{u(x)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2u(x)^2}\right)$$

★ Pour une distribution gaussienne, 68 % des valeurs sont comprises à moins d'un écart-type de la moyenne (dans  $[\bar{x} - u(x), \bar{x} + u(x)]$ ), et 95 % des valeurs sont comprises à moins de deux écarts-types de la moyenne (dans  $[\bar{x} - 2u(x), \bar{x} + 2u(x)]$ ). La probabilité de mesurer une valeur à plus de deux écarts-types est donc peu probable. On parle alors « d'**intervalle de confiance** » à 68% ou à 95%.

## 1.2 Définition de l'incertitude-type

def : La quantification de la variabilité d'une mesure  $x$  d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée  $u(x)$  (ou parfois  $\Delta x$ ).

Par définition, l'incertitude-type correspond à l'écart-type de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Par convention, le résultat d'une mesure s'écrit alors  $x \pm u(x)$ .

rq : Dans certains domaines, l'habitude est de choisir un intervalle de confiance à 95% donc d'écrire plutôt le résultat comme  $x \pm 2u(x)$ . La grandeur  $2u(x)$  est appelée « *incertitude-type élargie* ».

def : On appelle **incertitude-type relative** la grandeur  $u(x)/x$ , nombre sans dimension. Pour une mesure significative, quasiment toujours entre 0 et 1 donc régulièrement exprimée en pourcentage.

## 1.3 Accord sur les chiffres significatifs

L'estimation de l'incertitude-type est elle-même associée à une variabilité! On ne va pas estimer « d'incertitude sur l'incertitude », on se contentera en général de ne garder qu'un ou deux chiffres significatifs sur l'incertitude.

convention : pour écrire le résultat sous la forme  $x \pm u(x)$ , **le dernier chiffre significatif  $x$  doit être de même position que le dernier chiffre de l'incertitude** (en écriture décimale et dans la même unité).

ex1 : On mesure  $C = 507,4 \mu\text{F}$  et  $u(C) = 15,17 \mu\text{F}$ . Le résultat est alors  $507 \pm 15 \mu\text{F}$ .

ex2 : On mesure  $\ell = 47,4 \text{ cm}$  et  $u(\ell) = 3 \text{ mm}$ . Le résultat est alors  $47,4 \pm 0,3 \text{ cm}$  ou  $474 \pm 3 \text{ mm}$ .

## 1.4 Comparer deux mesures

def : L'écart normalisé  $E_N$  entre deux processus de mesure donnant les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  et d'incertitudes types  $u(x_1)$  et  $u(x_2)$  est défini par :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}} \quad (1)$$

convention : on qualifie souvent deux résultats de compatibles si leur écart normalisé vérifie la propriété  $E_N \leq 2$ .

rq : L'écart normalisé est parfois appelé « z-score ».

interprétation : La figure 2 illustre pourquoi ce seuil de 2 pour l'écart normalisé est utilisé dans de nombreuses disciplines. On remarque que les deux distributions ne se recouvrent quasiment plus pour  $E_N > 2$ .

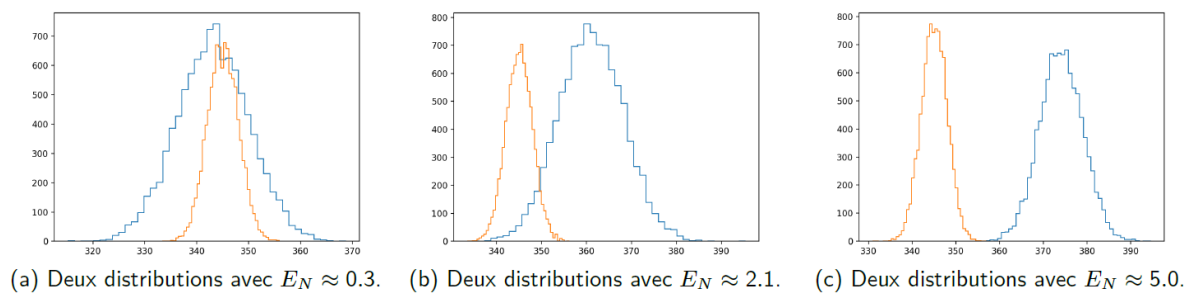


FIGURE 2 – Recouvrement de deux distributions pour différents écarts normalisés.

Le choix du seuil dépend du degré de certitude qu'on souhaite avoir sur la compatibilité. Par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5 pour être certain que deux signaux ne sont vraiment pas compatibles.

## 2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

### Savoir-faire

- Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).

### 2.1 Intérêt de la répétition d'une mesure

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus de mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure : l'écart-type.

interprétation : Considérons les graphes de la figure 1. L'incertitude-type d'une mesure unique est l'écart-type de la distribution. Mais qu'en est-il de la mesure de la moyenne? **Remarquer que plus le nombre de répétition  $N$  est grand, plus il est possible de repérer cette moyenne avec précision! C'est tout l'intérêt de répéter une mesure.**

→ on passe alors de l'expérience « mesurer un point à l'aide d'un protocole » à « mesurer la moyenne de  $N$  points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

## 2.2 Résultat d'un traitement statistique d'une mesure

prop : **Incertitudes de type A** : On réalise  $N$  fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux  $\{x_i\}$ . On note l'incertitude-type  $u(x)$  de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est  $\bar{x} + u(\bar{x})$ ,

avec la moyenne de la distribution  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  et avec  $u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$ .

rq : Ne pas confondre d'une part l'incertitude-type de la distribution qui est l'écart-type  $u(x)$  d'une mesure unique, avec d'autre part l'incertitude-type  $u(\bar{x})$  sur l'estimation de la moyenne de la distribution.

rq : La formule illustre qu'augmenter le nombre d'expériences  $N$  diminue l'incertitude sur la mesure de la moyenne. Mais comme la fonction racine croît de moins en moins vite, choisir  $N$  très grand n'améliore la précision que de manière modeste, il faut un compromis avec l'aspect chronophage de la répétition des expériences.

## 2.3 Hors-programme mais peut servir en TIPE : coefficient de Student

La formule précédente sous-estime l'incertitude pour des faibles nombres d'expériences (typiquement pour  $N < 10$ ). On peut alors utiliser un coefficient correctif, dit *coefficient de Student*  $k$  et utiliser la formule :

$$u(\bar{x}) = k \cdot \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

avec les valeurs de  $k$  en fonction du nombre  $N$  :

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
$k$	1,82	1,31	1,19	1,13	1,10	1,08	1,07	1,06	1,05	1,02	1,01	1,01	1,00

## 3 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Si de nombreux expérimentateurs mesurent la longueur d'une feuille avec une règle graduée, tout le monde obtiendra le même résultat. Sans variabilité, comment estimer l'incertitude sur la mesure ?

### Savoir-faire

- Évaluer une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).

### 3.1 Estimation de la plage de valeurs possibles

Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note  $\bar{x}$  la valeur centrale de cette plage et  $\Delta$  sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle  $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$ .

\* ex1, graduation : Soit une règle graduée au millimètre. Si la valeur est quasiment équidistante entre deux graduations, par exemple 6 et 7 mm, on peut choisir  $\bar{x} = 6,5$  mm et  $\Delta = 0,5$  mm (voire un peu moins). Si on observe que la valeur tombe quasiment pile sur la graduation 3 mm, on peut éventuellement choisir  $\bar{x} = 3,0$  mm et une valeur plus faible pour  $\Delta$ , par exemple de 0,2 mm.

\* ex1, notice d'appareil : Les notices des multimètres contiennent des tableaux fournissant ce qui est appelé parfois « précision ». Comme elles n'expliquent quasiment jamais la nature de cette grandeur (incertitude-type ? intervalle ? demi-intervalle ?), on admettra qu'il s'agit de  $\Delta$ .

rq : Précisons le vocabulaire employé par les notices d'appareils de mesure à affichage numérique, c'est-à-dire une suite finie de chiffres. La notice fournit régulièrement la précision sous la forme «  $p\%L + n D$  ». Où  $p\%L$

indique qu'il faut prendre  $p$  pourcent de la valeur affichée, et  $n$  D veut dire qu'il faut prendre  $n$  fois le plus petit chiffre affichable dans le calibre utilisé<sup>2</sup>. Ces valeurs dépendent en général du choix du calibre.

ex : Pour une lecture sur l'appareil 137,2 V (donc 1D vaut 0,1 V) et une notice qui donne une précision de 0,5%+4D :

$$\Delta = 0,5\% \times 137,2 + 4 \times 0,1 = 0,686 + 0,4 = 1,1 \text{ V}$$

rq : En pratique, les deux termes en % et en D sont souvent du même ordre de grandeur donc on peut rarement en négliger un devant l'autre.

### 3.2 Ne pas surestimer la précision d'une mesure par graduation ou curseur

Le bon sens de l'expérimentateur permet un regard critique sur la plage de valeur possible d'une mesure. Cet intervalle est souvent plus grand qu'une graduation où qu'un pas d'un curseur.

ex1 : Considérons une expérience sur un banc d'optique avec lampe, objet, lentille convergente. Puis on place l'écran pour avoir l'image la plus nette possible. On peut a priori mesurer la position de l'écran au millimètre près grâce au banc d'optique... mais est-on certain que c'est la position où l'image est la plus nette ?

→ Il faut déplacer l'écran pour estimer la plage de position où l'image apparaît nette. Cela dépend donc de l'expérimentateur et de la position des autres objets. En pratique, on trouve souvent une plage de valeur plus grande qu'une graduation.

ex2 : Considérons une mesure de tension à l'oscilloscope à l'aide d'un curseur. Dans un calibre donné, le pas de déplacement du curseur a donc un rôle similaire à la graduation d'une mesure à la règle. Mais dans certains cas, ce pas de déplacement est plus petit que l'épaisseur du signal dont on souhaite mesurer la tension !

→ Il faut déplacer le curseur pour estimer la plage de valeurs où le curseur représente bien la valeur du signal. Cela dépend donc de l'expérimentateur, de la netteté du signal et du calibre choisi. En pratique, on trouve souvent une plage de valeur plus grande qu'un pas du curseur.

### 3.3 Lien entre incertitude-type et plage de valeur (incertitudes type B)

prop : **Incertainces de type B** : Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note  $\bar{x}$  la valeur centrale de cette plage et  $\Delta$  sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle  $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$ .

Dans ce cas, le résultat de la mesure est  $\boxed{\bar{x} + u(\bar{x})}$  avec  $u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$ .

rq : Si on note  $a = 2\Delta$  la longueur totale de la plage possible de mesure, l'incertitude s'écrit aussi :  $u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$ . On obtient **environ un tiers de graduation**<sup>3</sup>.

interprétation : Le facteur  $\sqrt{3}$  se démontre<sup>4</sup> sous l'hypothèse que la distribution de probabilité des valeurs possibles est uniforme dans l'intervalle  $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$ . Faire une autre hypothèse ne change quasiment pas en pratique l'ordre de grandeur de  $u(\bar{x})$  donc cette hypothèse n'est pas très contraignante.

## 4 Les incertitudes-type composées (propagation des incertitudes)

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles par une formule pour obtenir le résultat souhaité.

2. Ce plus petit chiffre affichable est parfois appelé « résolution » ou « digit » en anglais.

3. Ce qu'on aurait proposé avec un peu de bon sens sans avoir besoin de l'hypothèse de distribution uniforme...

4. En calculant l'écart type  $u(\bar{x})$  de la distribution uniforme de proba  $p(x) = \frac{1}{2\Delta}$  sur l'intervalle  $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$ .

## Savoir-faire

- Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.
- Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
- Simuler un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.

### 4.1 Cas simples : calculs au programme

prop : Type somme ou différence. Supposons qu'on calcule  $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ . L'incertitude-type de  $y$  est alors donnée par :

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

Dans le cas particulier courant où  $y(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ , on obtient :

$$u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$$

ex courant : distance comme différence de position  $D = x_2 - x_1$ .

prop : Type produit ou quotient. Supposons qu'on calcule  $y(x_1, x_2) = kx_1^\alpha x_2^\beta$ . L'incertitude-type de  $y$  est alors donnée par :

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Dans le cas particulier fréquent où  $y(x_1, x_2) = x_1 x_2$  ou  $x_1/x_2$ , on obtient :

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

ex courant : calcul de résistance à partir de mesures de tension et intensité  $R = U/I$ , calcul d'inverse de distance à partir de mesure de distance  $\overline{OA'}$ .

prop : **Dans les formules de types produit ou quotient, on parle d'incertitude prépondérante si une des incertitudes relatives est 10 fois plus grande que les autres. Dans ce cas, on peut négliger les autres incertitudes.**

interprétation : La formule implique une somme d'incertitudes relatives au carré. Ainsi, un rapport 10 entre incertitudes relatives donne un facteur 100 dans la formule. On peut donc alors ne garder que le terme prépondérant.

### 4.2 Cas général : simulation Monte-Carlo

Considérons une expérience où on a mesuré  $x_1$  et  $x_2$  et estimé leurs incertitudes-type  $u(x_1)$  et  $u(x_2)$ . On calcule  $y(x_1, x_2)$  grâce à une formule connue et on souhaite l'incertitude  $u(y)$ . Une simulation numérique de type Monte-Carlo<sup>5</sup> permet une estimation de  $u(y)$ .

5. C'est-à-dire un algorithme faisant intervenir des processus aléatoires.

méthode : On dispose de mesures  $x_1, x_2$ , leurs demi-intervalles certains  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  (ou leurs incertitudes-type  $u(x_1), u(x_2)$ ) et de la formule  $y(x_1, x_2)$ . **Les étapes principales de l'estimation de  $u(y)$  par un algorithme Monte-Carlo sont les suivantes :**

- Pour de nombreuses itérations :
  - ★ calculer une valeur  $X1$  au hasard par une loi de probabilité de moyenne  $x_1$  et écart-type  $u(x_1)$
  - ★ calculer une valeur  $X2$  au hasard par une loi de probabilité de moyenne  $x_2$  et écart-type  $u(x_2)$
  - ★ calculer une valeur de  $Y$  par application de la formule  $y(X1, X2)$ , et la stocker
- Calculer l'écart-type des valeurs de  $Y$

rq : Pour la plupart des mesures, on utilisera une **loi uniforme** (mesures par graduations, affichage numérique, etc). Si une mesure  $x_i$  vient d'un traitement statistique sur un grand nombre de valeurs, on pourra éventuellement choisir une loi gaussienne.

### 4.3 Cas général : calcul hors-programme mais peut servir en TIPE

prop : Cas général. Supposons qu'on calcule  $y(\{x_i\})$  avec  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . L'incertitude-type de  $y$  est alors donnée par :

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}$$

rq : Si la fonction  $y$  est trop compliquée, c'est beaucoup moins lourd d'utiliser la simulation Monte-Carlo.

## 5 Exploitation d'une régression linéaire

### Savoir-faire

- Juger qualitativement si des données expérimentales avec incertitudes sont en accord avec un modèle.
- Expliquer en quoi le coefficient de corrélation n'est pas un outil adapté pour juger de la validité d'un modèle linéaire.
- Simuler un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

### Principe de l'ajustement de données expérimentales par un logiciel

- ★ On dispose d'une part, d'un tableau de mesures à deux colonnes de même taille (par exemple mesure du champ magnétique en fonction de l'intensité), ainsi que des incertitudes de mesure associées,
- ★ et d'autre part, d'une formule reliant les deux paramètres mesurés.

Le protocole d'ajustement est alors :

- **tracer le graphe**, de préférence<sup>6</sup> avec en ordonnée le paramètre dont l'incertitude relative est la plus grande.
- demander au logiciel d'**effectuer l'ajustement**.
- **validation du modèle** : le logiciel donnera (presque) toujours un résultat, même s'il est absurde ! Il faut donc vérifier sur le graphe que l'ajustement est qualitativement correct, cf partie 5.1. Éventuellement resserrer l'intervalle d'ajustement si le modèle est clairement faux sur une partie des mesures, cf partie 5.1.3. Ne pas trop se fier au coefficient de corrélation pour (in)valider un ajustement linéaire, cf partie 5.2.
- Seulement une fois que le modèle est validé, on peut **utiliser les résultats de l'ajustement** : valeurs des paramètres et leurs incertitudes... mais le problème est qu'en général on ne sait pas comment ces incertitudes sont estimées...

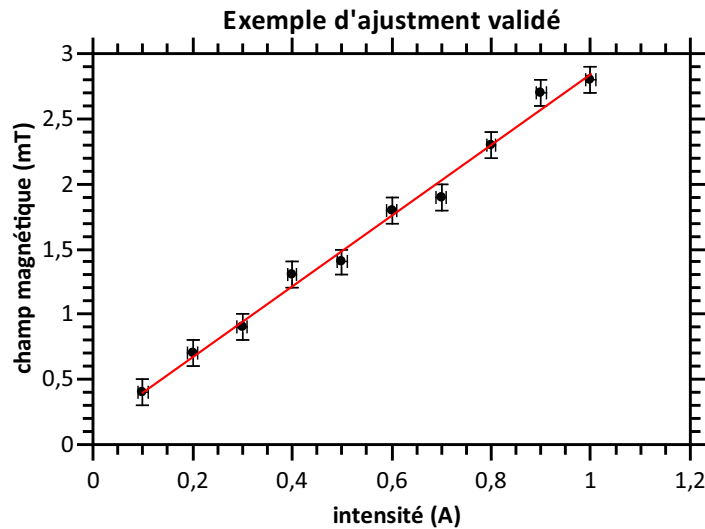
6. Car lors d'un ajustement, de nombreux logiciels ne prennent en compte que l'incertitude sur l'ordonnée.

## 5.1 Critères qualitatifs de validité

Qualitativement, un ajustement est validé si :

- ★ les points de mesure semblent répartis aléatoirement de part et d'autre du modèle,
- ★ les incertitudes sont de l'ordre de l'écart moyen entre mesures et modèle.

Le graphe suivant présente des mesures du champ magnétique en fonction de l'intensité d'un circuit. Un ajustement linéaire du type  $y = ax + b$  est effectué.



On remarque que les critères qualitatifs semblent corrects. → Les mesures sont donc en accord avec un modèle linéaire. On peut alors extraire des informations fournies par le logiciel d'ajustement :

$$b \text{ (y-intercept)} = 1,266666666666669e-01 \text{ +/- } 6,831300510639732e-02$$

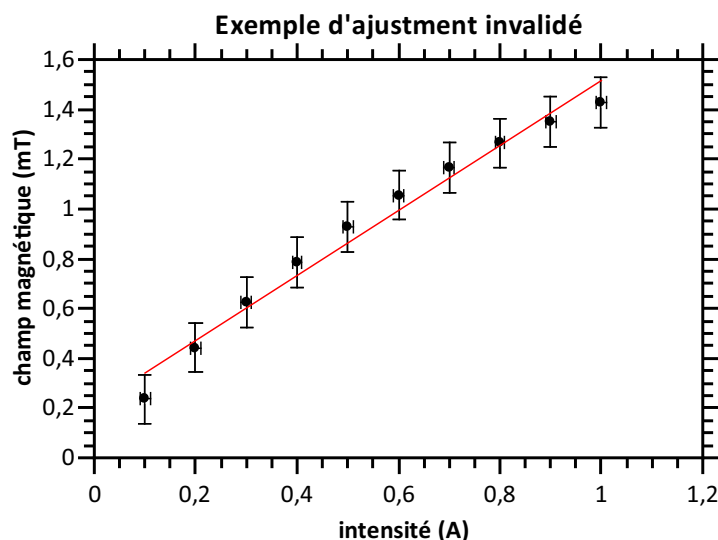
$$a \text{ (slope)} = 2,715151515151515e+00 \text{ +/- } 1,100963765126361e-01$$

$$\chi^2/\text{doF} = 6,757575757575760e-01$$

$$r^2 = 0,991189601359093$$

def : les coefficients  $\chi^2$  et  $r$  fournis par le logiciel sont des critères quantitatifs de validité d'un ajustement. Leur utilisation quantitative n'est pas au programme de CPGE. On dit (trop) souvent qu'un coefficient de corrélation  $r^2$  proche de 1 signifie que l'ajustement est valide. En pratique, c'est plus subtil. Cf partie 5.2.

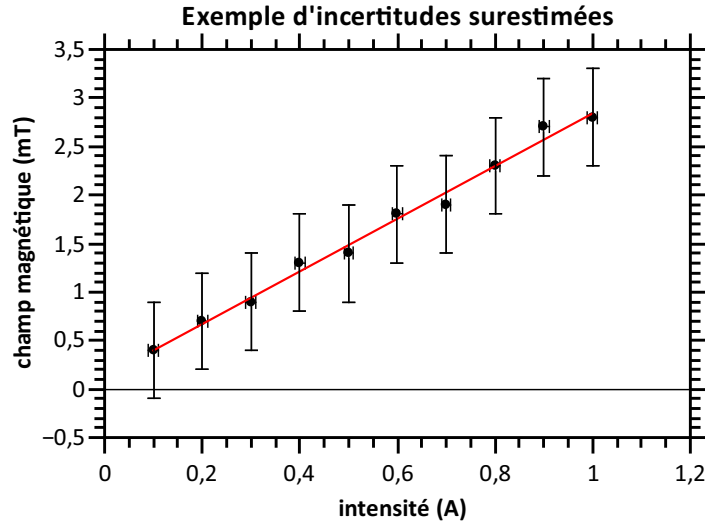
### 5.1.1 Modèle non validé car répartition non aléatoire





- ★ Les incertitudes semblent du même ordre de grandeur que l'écart moyen entre modèle et mesures.
- ★ Mais les points de mesure ne sont pas du tout répartis aléatoirement de part et d'autre du modèle.
- on en conclut que le modèle n'est pas vérifié.
- rq : Le logiciel indique un coefficient de corrélation  $r^2 = 0,98$  proche de 1 même si le modèle est invalide!!

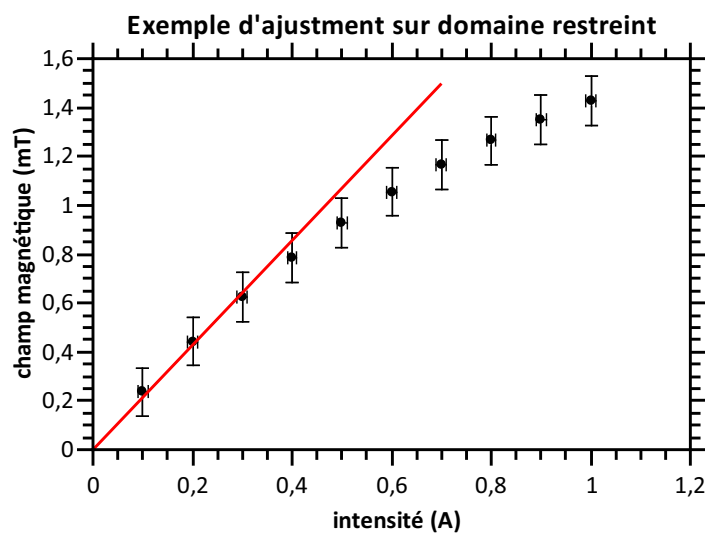
### 5.1.2 Modèle non validé car incertitudes mal estimées



- ★ Les points de mesure semblent répartis aléatoirement de part et d'autre du modèle,
- ★ Mais les incertitudes sont largement supérieures à l'écart moyen au modèle.
- on en conclut que le modèle n'est pas vérifié (ce qui ne veut pas forcément dire qu'il est faux). En effet, des courbes non linéaires pourraient tout aussi bien ajuster les données. Peut-être que les incertitudes ont été surestimées.

### 5.1.3 Restriction du domaine d'ajustement

Parfois, le modèle n'est valide que sur un domaine restreint des mesures. Par exemple, reprenons les données de la partie 5.1.1 qui n'étaient pas ajustables par un modèle linéaire :



- On remarque qu'un modèle linéaire semble correct pour les premiers points (bien que les incertitudes semblent un peu surestimées). C'est à l'expérimentateur de décider de restreindre l'intervalle d'ajustement.

## 5.2 Limite du coefficient de corrélation

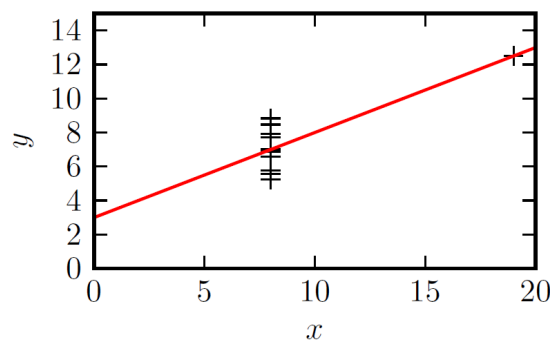
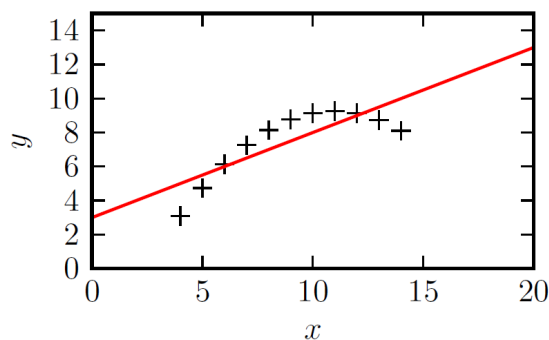
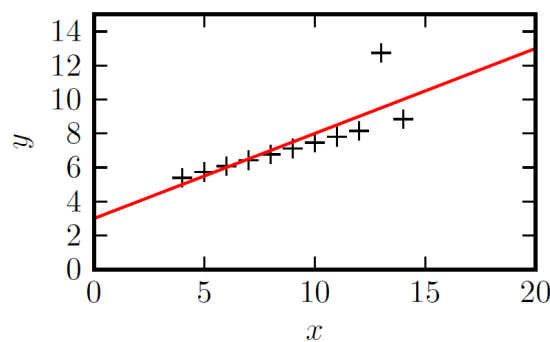
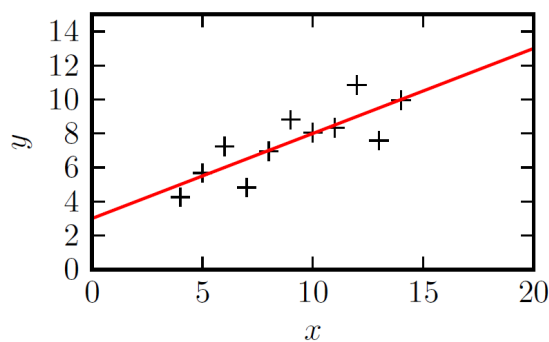
Pour quantifier l'écart entre les points expérimentaux et la droite de régression, les calculatrices et logiciels renvoient généralement la valeur du coefficient de corrélation linéaire  $r$ , ou parfois son carré  $r^2$ . Sa définition exacte est trop technique pour être donnée ici.

Le coefficient  $r$  est un nombre compris par définition entre  $-1$  et  $1$ , du même signe que la pente  $a$ , qui mesure l'existence d'un lien linéaire entre  $x$  et  $y$  : plus  $r^2$  est proche de  $1$ , mieux les points sont alignés. La valeur  $r^2 = 1$  signifie que tous les points expérimentaux sont exactement sur la droite. En pratique, pour un petit nombre de mesures comme en TP, il est fréquent d'obtenir  $r^2 > 0,9$  même si les points expérimentaux sont clairement éloignés de la droite.

Une question légitime est de savoir si le coefficient de corrélation permet ou non de conclure à la validité du modèle. L'exemple suivant permet de répondre par la négative.

### Exemple du quartet d'Anscombe :

Le quartet d'Anscombe est constitué de quatre ensembles de données qui ont les mêmes propriétés statistiques simples (moyennes, écarts types, équation de la régression linéaire, coefficient de corrélation linéaire) mais qui sont en réalité très différents, ce qui se voit facilement lorsqu'on les représente sous forme de graphiques. Ils ont été construits en 1973 par le statisticien Francis Anscombe dans le but de démontrer l'importance de tracer des graphiques avant d'analyser des données.



La droite de régression linéaire ne semble décrire correctement que le jeu de données représenté en haut à gauche.

Ainsi, fixer un critère arbitraire sur le coefficient de corrélation afin de valider, ou non, le modèle (par exemple  $r^2 > 0,99$ ) n'est pas pertinent. En effet, la présence d'un point aberrant (souvent issu d'une erreur de manipulation) ou de fortes erreurs aléatoires peut diminuer considérablement la valeur de  $r^2$  même si la loi reste vérifiée. Réciproquement, la valeur du coefficient de corrélation linéaire peut demeurer très élevée en dépit d'une courbure nettement visible dans les données.

→ **La seule façon valable de conclure à la validité d'une régression linéaire est une représentation graphique.**

Il existe en réalité des outils statistiques plus fiables que  $r^2$ , comme le  $\chi^2$ , mais d'une part ils exigent un recul conséquent tant en statistiques que sur l'expérience réalisée, et d'autre part ils demandent un nombre important de mesures pour être efficaces.

### 5.3 Ajustement par une loi non linéaire

Jusqu'ici, seules les modélisations linéaires étaient évoquées. Mais de nombreuses lois physiques ne sont pas linéaires !

Les logiciels peuvent souvent effectuer des régressions non-linéaires, notamment pour des fonctions simples du type puissance, exponentielle ou sinusöide. Mais, si possible, **il vaut mieux se rapporter à une linéarisation de la formule** pour plusieurs raisons :

- ★ il est bien plus facilement de voir qualitativement sur un graphe si une courbe est linéaire que si elle est en puissance ou exponentielle,
- ★ les ajustements linéaires sont plus rapides que les ajustements non linéaires par des fonctions prédéfinies par le logiciel, eux-mêmes bien plus rapides et fiables que des ajustements par des formules fournies par l'utilisateur.

Ce n'est pas toujours possible, mais voici des exemples classiques de relations non-linéaires qui peuvent se linéariser sans approximation :

- **ex1** : Deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont montées en parallèle. On dispose de mesures de la résistance équivalente  $R_{eq}$  en fonction de  $R_1$  à  $R_2$  fixe. La relation  $R_{eq} = f(R_1)$  n'est pas linéaire. Que proposez-vous de tracer sur un graphe pour obtenir une droite si le modèle est valide ?
- **ex2** : On dispose de mesures de la vitesse du son  $c$  en fonction de la température  $T$ . Dans le modèle d'un gaz parfait lors d'une évolution isentropique,  $c = \sqrt{\gamma RT/M}$ . Que proposez-vous de tracer sur un graphe pour obtenir une droite si le modèle est valide ?
- **ex3** : On dispose de mesures de la tension  $u$  d'un condensateur en fonction du temps  $t$ . Dans le modèle d'un circuit  $RC$  tel que  $u(0) = E$ , on a  $u(t) = E \cdot \exp(-t/(RC))$ . Que proposez-vous de tracer sur un graphe pour obtenir une droite si le modèle est valide ?
- **ex4** : On dispose de mesures de l'amplitude acoustique  $s$  en fonction de la distance  $r$  à la source. On cherche à vérifier un modèle du type loi de puissance  $s(r) = a \cdot r^p$ . Que proposez-vous de tracer sur un graphe pour obtenir une droite si le modèle est valide ? Comment extraire  $p$  ?

prop : Tracer le logarithme de l'ordonnée permet de linéariser le tracé d'une exponentielle.

prop : On appelle « échelle log-log » le tracé du logarithme d'une grandeur en fonction du logarithme d'une autre. Pour une loi de puissance  $y(x) = C \cdot x^n$ , la pente en échelle log-log donne directement la puissance  $n$ .

### 5.4 Estimation Monte-Carlo des incertitudes des paramètres d'un ajustement

Certains logiciels de régression linéaires fournissent une incertitude aux paramètres de l'ajustement. Le problème est que les logiciels ne précisent pas toujours la méthode de calcul de cette incertitude. L'objectif de cette partie est d'estimer ces incertitudes par une simulation de type Monte-Carlo.

méthode : On dispose de couples de mesures  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \text{etc}\}$ , noté  $\{(x_i, y_i)\}$  avec  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Ainsi que de leurs incertitudes  $\{(u(x_1), u(y_1)), (u(x_2), u(y_2)), \text{etc}\}$ . Et on a vérifié sur un graphe que le modèle linéaire  $y = ax + b$  était qualitativement vérifié. **Les étapes principales de l'estimation des valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  et leurs incertitudes  $u(a)$  et  $u(b)$  par un algorithme Monte-Carlo sont les suivantes :**

- Pour de nombreuses itérations :
  - ★ pour chaque valeur de  $i$  :
    - calculer une valeur  $X_i$  au hasard par une loi de probabilité de moyenne  $x_i$  et écart-type  $u(x_i)$
    - calculer une valeur  $Y_i$  au hasard par une loi de probabilité de moyenne  $y_i$  et écart-type  $u(y_i)$
  - ★ effectuer une régression linéaires des  $Y_i$  en fonction des  $X_i$ . Stocker les paramètres  $A$  et  $B$  obtenus.
- Calculer la moyenne et l'écart-type des valeurs de  $A$  et de  $B$  qui donnent  $a, b, u(a), u(b)$ .