

O2 : Interférences lumineuses

Regardez autour de vous, voyez-vous des interférences ? Dans la vie courante, **on n'observe quasiment jamais des phénomènes d'interférences malgré les multitudes de sources lumineuses de notre entourage !!** Cela signifie que des conditions contraignantes sont nécessaires pour observer des interférences.

1 Conditions d'obtention d'interférences lumineuses

1.1 Superposition de deux ondes

schéma : Soient deux sources S_1 et S_2 qui émettent des ondes arrivant au point M . Les expressions des deux ondes en M sont $s_1(t) = s_{01} \cos(\omega_1 t - k_{01}(S_1 M) + \phi_{01})$ et $s_2(t) = s_{02} \cos(\omega_2 t - k_{02}(S_2 M) + \phi_{02})$. On note l'intensité lumineuse $I = K \langle s^2(t) \rangle$, calculer l'intensité I_1 en M de l'onde 1 si elle était seule. Idem pour I_2 .

→ Quelle est l'intensité résultante en M ?

prop : **Linéarité de l'amplitude de l'onde lumineuse.** L'onde résultante est $s(M) = s_1(M) + s_2(M)$.

justification : Les équations de Maxwell sont linéaires en champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B} (cf chapitre E4), donc aussi en $s(M)$ qui est proportionnelle à une composante de \vec{E} .

attention : Linéarité de l'amplitude de l'onde mais pas de son intensité ! En général, $I(M) \neq I_1(M) + I_2(M)$.

prop : L'intensité résultante en M s'exprime de manière générale :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot (\cos((\omega_1 + \omega_2)t - k_{01}(S_1 M) + \phi_{01} - k_{02}(S_2 M) + \phi_{02}) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_{01}(S_1 M) + \phi_{01} + k_{02}(S_2 M) - \phi_{02})) >$$

démo : Utiliser la définition de l'intensité et $\cos(a) \cdot \cos(b) = (1/2) \cdot (\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

interprétation : * terme I_1 : intensité de source 1 seule,
 * terme I_2 : intensité de source 2 seule,
 * terme $\langle \cos \dots \rangle$: sans ce terme, l'intensité résultante serait simplement la somme des intensités.
 → **Ce terme représente les interférences.**

1.2 Critères de cohérence

Critères d'interférences lumineuses : Deux ondes peuvent interférer en un point si :

- * elles proviennent de la **même source** (et sont donc synchrones),
- * la **différence de chemin optique est inférieure à la longueur de cohérence**.

def : Deux ondes qui vérifient ces critères sont dites « **cohérentes** »¹.

démo :

- Pulsation : Que devient le terme d'interférences si les sources sont asynchrones ($\omega_1 \neq \omega_2$) ?
 → les interférences sont absentes pour deux sources de pulsations différentes.
- Source d'origine : Considérons deux sources différentes mais synchrones ($\omega_1 = \omega_2$ notée ω). Que devient le terme d'interférences ?
 → les interférences sont absentes pour deux sources différentes.
- Différence de chemin optique : Considérons deux trajets différents depuis une seule source. Que devient le terme d'interférences ?
 → les interférences sont absentes pour deux trajets de chemins optiques trop différents.

1.3 Réalisation pratique de deux ondes cohérentes

1.3.1 Interféromètres par division du front d'onde

def : Un interféromètre « **à division du front d'onde** » recombine des ondes issues de parties différentes du front d'onde, par exemple à l'aide de trous ou de miroirs.

1. CE : Justifier et utiliser l'additivité des intensités pour deux ondes incohérentes.

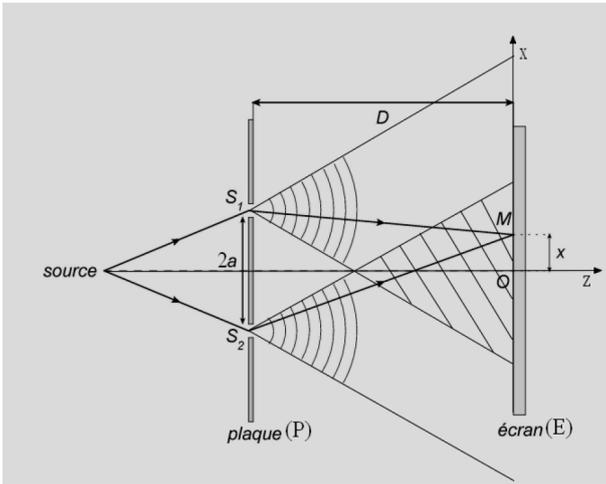


FIGURE 1 – Trous d’Young : le front d’onde incident est séparé par deux trous S_1 et S_2 qui le diffracte. Cf chapitre O3.

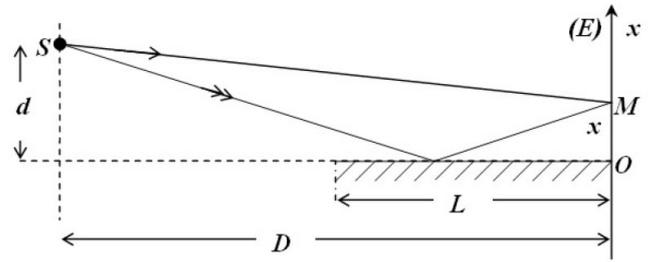


FIGURE 2 – Miroir de Lloyd : une partie du front d’onde incident illumine directement l’écran, une partie subit une réflexion.

1.3.2 Interféromètres par division d’amplitude

def : Un interféromètre « à division d’amplitude » recombine des ondes issues du même faisceau mais séparés par des réflexions partielles sur des dioptres.

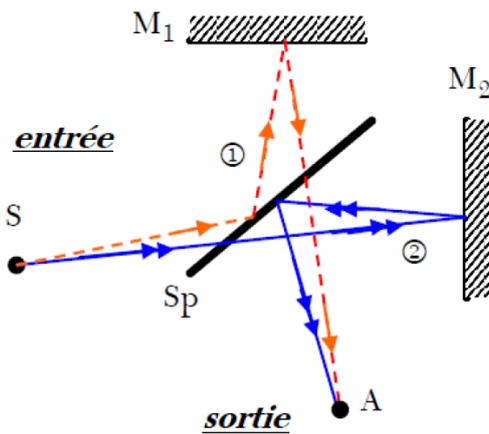


FIGURE 3 – Interféromètre de Michelson, constitué de deux miroirs et une lame séparatrice qui réfléchit la moitié de l’onde incidente. Cf chapitre O4.

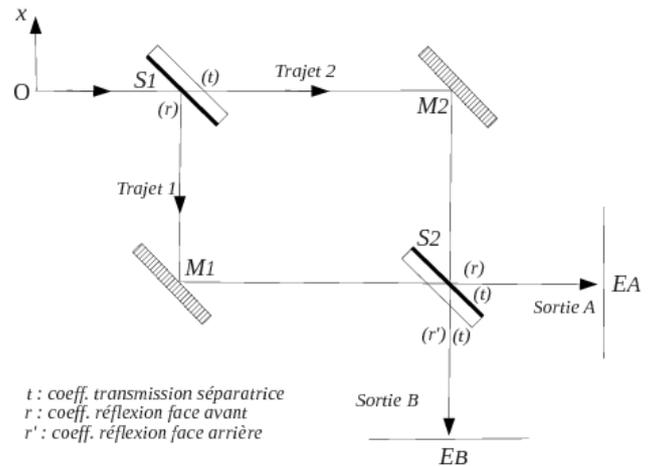


FIGURE 4 – Interféromètre de Mach-Zehnder, constitué de deux miroirs et deux lames séparatrices.

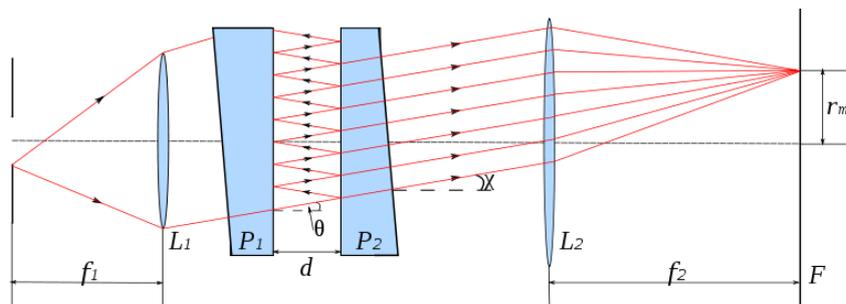


FIGURE 5 – Interféromètre de Fabry-Pérot, interférences entre de multiples ondes.

2 Interférences entre deux ondes cohérentes monochromatiques

Considérons deux ondes cohérentes. On a vu dans la partie précédente que le terme d'interférences est proportionnel à $\cos[k_0 \cdot ((SM)_2 - (SM)_1)]$.

2.1 Différence de marche et ordre d'interférence

def : La **différence de marche** en un point M entre deux ondes issues de S est la différence entre les chemins optiques des deux trajets notés 1 et 2 : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$.

attention : Le signe de δ dépend du choix arbitraire du sens de la soustraction, il faut donc toujours explicitement définir δ .

prop : La différence de marche est directement reliée au déphasage entre les ondes : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k_0\delta = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}$

→ Intérêt de la dernière expression : comparer δ et λ_0 , donc :

def : **ordre d'interférence** $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$. Grandeur sans dimension.

interprétation de p : combien d'oscillations de plus de l'onde sur trajet 2 par rapport à 1.

2.2 Formule de Fresnel et franges d'égales intensité

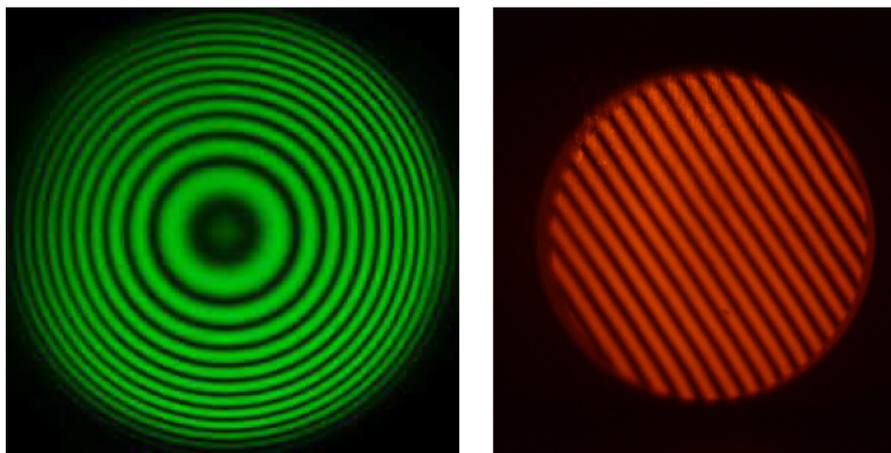
Calculons l'intensité en M éclairé par deux ondes cohérentes².

Formule de Fresnel :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cdot \cos(\Delta\varphi(M)) \\ &= I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cdot \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right) \end{aligned}$$

| démo : Reprendre la démo de la partie 1 et d'utiliser les définitions de la partie 2.1.

rq : Pour $I_2 = 0$, on trouve bien que $I = I_1$, il n'y a pas d'interférences s'il n'y a qu'un trajet possible.



• Condition d'interférences constructives : on parle de **franges brillantes** quand le terme d'interférence est maximal.
prop : p est un entier relatif, δ est multiple de la longueur d'onde dans le vide λ_0 .

• Condition d'interférences destructives : on parle de **franges sombres** quand le terme d'interférence est minimal.
prop : p est demi-entier (entier+1/2), δ est multiple demi-entier de la longueur d'onde dans le vide λ_0 .

| démo : Justifier ces propriétés.

prop : Deux franges successives de même nature sont séparées de $\Delta p = \pm 1 \Leftrightarrow \Delta\delta = \pm\lambda_0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = \pm 2\pi$.

2. CE : Établir la formule de Fresnel. Identifier une situation de cohérence entre deux ondes et utiliser la formule de Fresnel.

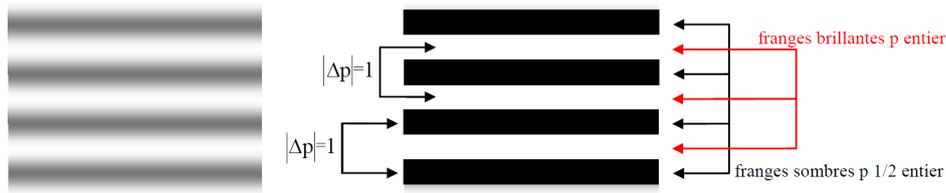


FIGURE 6 – Gauche : observation d'interférences. Droite : repérage des franges sombres et brillantes.

- Cas particulier de la formule de Fresnel pour des intensités identiques :

Formule de Fresnel pour $I_1 = I_2$:

$$I = 2I_1 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right)$$

2.3 Contraste

À quel point distingue-t-on les franges brillantes des franges sombres sur un écran ?

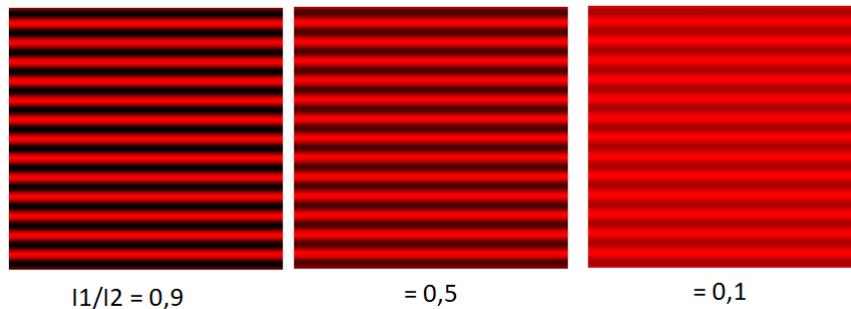


FIGURE 7 – Influence des intensités relatives des deux sources sur le contraste des franges vues par un capteur linéaire.

def : **Contraste** $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

interprétation : Contraste nul ($C = 0$) si intensité identique pour franges sombres et brillantes → franges non distinctes. Contraste total ($C = 1$) si intensité des franges sombres nulle.

prop : $C \in [0, 1]$ (car $I_{\max} \geq I_{\min} \geq 0$).

prop : Expression de C pour deux sources d'intensité I_1 et I_2 en un point :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

| démo : Commencer par exprimer I_{\max} et I_{\min} en fonction de I_1 et I_2 .

- Étude numérique du contraste : Voici un extrait du script Python utilisé :

```
# Definition de la fonction a tracer
```

```
def C(x):
```

```
    return(2*np.sqrt(x) / (1+x))
```

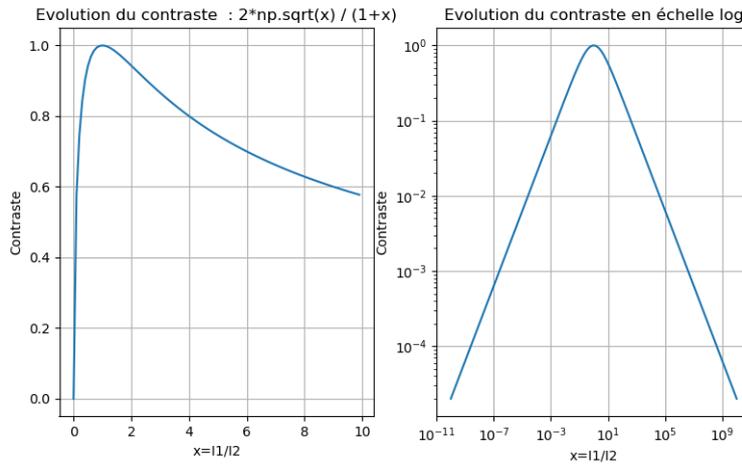
```
# Liste des abscisses
```

```
L_x = [k/10 for k in range(100)] # echelle de 0 a 9,9 par 0,1
```

```
# Liste des ordonnees
```

```
L_C = [C(x) for x in L_x]
```

```
# Liste des abscisses pour echelle log
L_x_log = [10**(k/10) for k in range(-100,101)] # de 10**-10 a 10**10
L_C_log = [C(x) for x in L_x_log]
```



Observations :

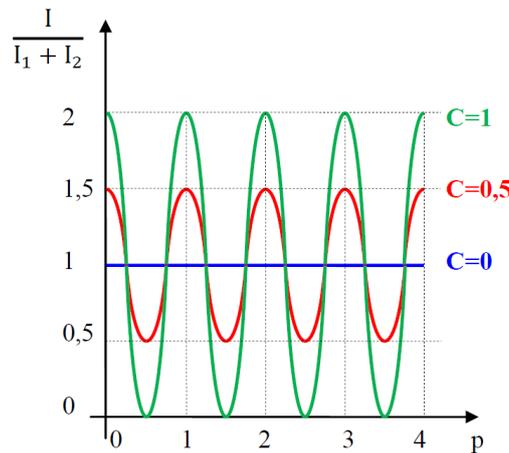
- * Cas $I_1 = I_2$, alors $C = 1$: Contraste maximal quand intensités identiques³.
- * Cas $I_1 \ll I_2$, alors $C \rightarrow 0$.
- * Cas $I_1 \gg I_2$, alors $C \rightarrow 0$.

prop : Pour un phénomène d’interférences entre plusieurs ondes :

- * **Le contraste est d’autant plus fort que les intensités incidentes sont proches.**
- * **Le contraste est d’autant plus faible que les intensités incidentes sont différentes.**

- Retour à la formule de Fresnel : On peut l’exprimer avec le paramètre contraste :

$$I = I_1 + I_2 + C(I_1 + I_2) \cos 2\pi p = (I_1 + I_2)(1 + C \cos(2\pi p)) \tag{1}$$



2.4 Figure d’interférences issue de deux sources secondaires

La plupart des interféromètres étudiés en PC peuvent se ramener à l’étude de deux sources dites « secondaires », cf figure.

prop : Les surfaces correspondant à un ordre d’interférence donné sont des hyperboloïdes de révolution.

prop : Dans le cas de deux sources S_1 et S_2 :

- * Dans un plan orthogonal à S_1S_2 : les courbes $p = cte$ sont des **cercles** de centre aligné avec S_1S_2 .
- * Dans un plan parallèle à S_1S_2 : les courbes $p = cte$ sont des hyperboles. Dans la plupart des cas réalistes, on n’observe que les hyperboles proches du centre qui sont assimilables à des **droites**.

3. CE : Associer un bon contraste à des intensités voisines.

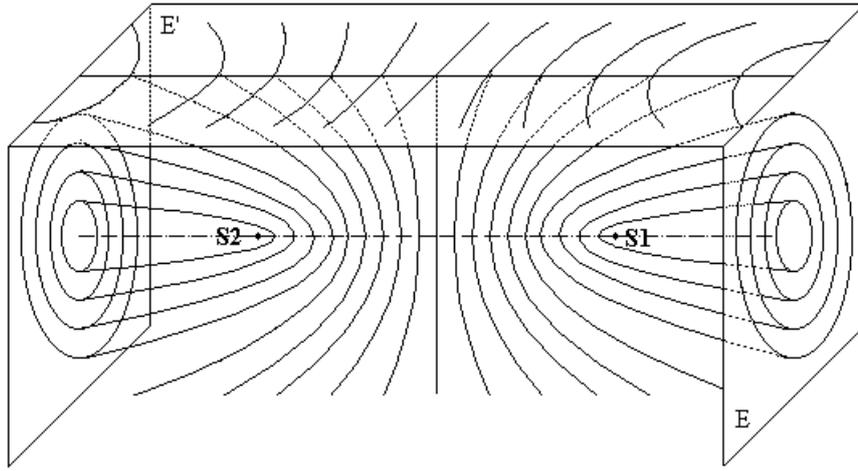


FIGURE 8 – Surfaces de même ordre d'interférence pour deux sources secondaires.

3 Rappel : Représentations d'un signal sinusoïdal

3.1 Représentation complexe d'une onde sinusoïdale

Soit un signal sinusoïdal $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \phi)$ où $s_0 > 0$ est l'amplitude. On peut lui associer le nombre complexe $\underline{s}(t)$ tel que $s(t)$ est sa partie réelle :

Correspondance :

- **signal réel** : $s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$,
- **représentation complexe** : $\underline{s}(t) = s_0 \cdot \exp(j(\omega t + \phi))$.

rq : $\underline{s}(t) = s_0 e^{j(\omega t + \phi)} = s_0 e^{j\phi} \times e^{j\omega t}$.

def : $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\phi}$ est appelée **amplitude complexe** de $\underline{s}(t)$. Ne dépend pas du temps. Grandeur essentielle car le $\exp(j\omega t)$ n'apporte pas d'information pour des signaux linéaires.

prop : Conversion retour : $s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t))$

prop : **Correspondance** : $s(t) \Leftrightarrow \underline{s}_0$

	signal $s(t)$	amplitude complexe \underline{s}_0
s_0	amplitude	module
ϕ	phase à $t = 0$	argument

notation : * En physique, on utilise i ou j pour la notation complexe : i est systématiquement utilisé en mécanique quantique, mais évité en électricité pour éviter les confusions avec l'intensité.

* Le conjugué d'un nombre complexe z est noté \bar{z} ou z^* .

3.2 Représentation dans le plan complexe d'interférences entre deux ondes cohérentes

Considérons l'onde résultante de la superposition de deux ondes :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = S_1 \cos(\omega t + \phi_1) + S_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

Par linéarité, l'amplitude complexe résultante est la somme des amplitudes complexes :

$$\underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) = S_1 e^{j\phi_1} + S_2 e^{j\phi_2}.$$

prop : Le déphasage entre les deux ondes est donné par $\Delta\phi = \arg(\underline{s}_2) - \arg(\underline{s}_1) = \phi_2 - \phi_1$.

prop : Par observation graphique :

- Cas signaux en phase ($\Delta\phi = 0$) : amplitude résultante maximale.
- Cas opposition de phase ($\Delta\phi = \pi$) : amplitude résultante minimale.
- Cas opposition de phase ($\Delta\phi = \pi$) et même amplitude ($S_1 = S_2$) : signal nul.

rq : cohérent avec des calculs de trigonométrie directement sur les signaux sinusoïdaux.

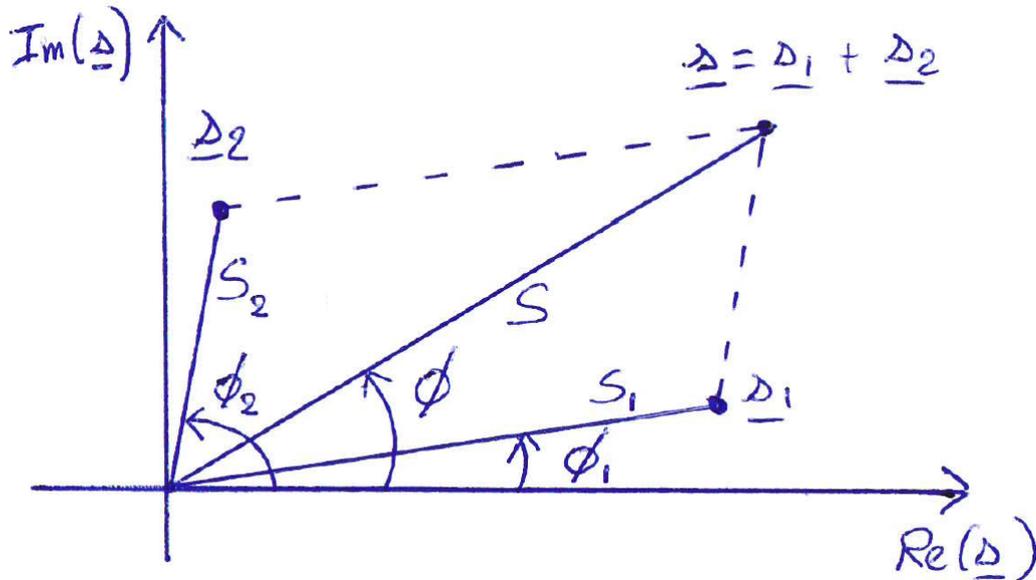


FIGURE 9 – Représentation complexe d'une somme de deux ondes sinusoïdales cohérentes.

prop : L'amplitude au carré de l'onde résultante est :

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (2)$$

C'est la formule de Fresnel, qu'on peut démontrer avec la représentation complexe :

$$\text{d\u00e9mo} : S^2 = |s|^2 = \underline{s} \cdot \overline{s} = (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) \cdot (\overline{s}_1 + \overline{s}_2) = S_1^2 + S_2^2 + \underline{s}_1 \overline{s}_2 + \underline{s}_2 \overline{s}_1 = S_1^2 + S_2^2 + S_1S_2 (e^{j(\phi_1 - \phi_2)} + e^{j(\phi_2 - \phi_1)})$$

4 Interférences entre N ondes coh\u00e9rentes

cadre du programme : superposition de N ondes quasi-monochromatiques, coh\u00e9rentes, de m\u00eame amplitude et de phase en progression arithm\u00e9tique avec $N \gg 1$.

notation : Les N ondes indic\u00e9es par l'entier $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ s'\u00e9crivent : $s_i(t) = S \cdot \cos(\omega t + i \cdot \Delta\phi)$ o\u00f9 $\Delta\phi$ est le d\u00e9phasage entre deux ondes successives.

4.1 Dispositifs exp\u00e9rimentaux : r\u00e9seaux de diffraction

Le principe est de produire un motif p\u00e9riodique de s\u00e9paration du front d'onde. Les plus courants sont les r\u00e9seaux de diffraction \u00e0 transmission ou r\u00e9flexion, cf figure suivante.

def : Un **r\u00e9seau en transmission** est un composant comportant une succession de lignes opaques et transparentes microscopiques. Les lignes sont invisibles \u00e0 l'oeil nu et globalement le r\u00e9seau para\u00eet transparent. Mais quand on regarde un objet \u00e9clair\u00e9 en lumi\u00e8re naturelle \u00e0 travers un r\u00e9seau, il apparait des couleurs de type « arc-en-ciel » issues de la d\u00e9composition de la lumi\u00e8re. Pour caract\u00e9riser un r\u00e9seau, on donne souvent le nombre n de lignes opaques par unit\u00e9 de longueur, ou bien la distance a entre deux lignes opaques successives appel\u00e9e « pas du r\u00e9seau ». Ces grandeurs sont reli\u00e9es par $a = 1/n$.

ex : Un r\u00e9seau de pas $a = 10 \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m}$ est de $n = 10^5 \text{ m}^{-1} = 100 \text{ traits par mm}$.

application : La plupart des spectrom\u00e8tres d\u00e9composent la lumi\u00e8re avec un r\u00e9seau de diffraction en r\u00e9flexion. Plus anecdotique, le r\u00e9seau de sillons grav\u00e9s sur un CD ou DVD est l'origine des irisations color\u00e9es \u00e0 sa surface.

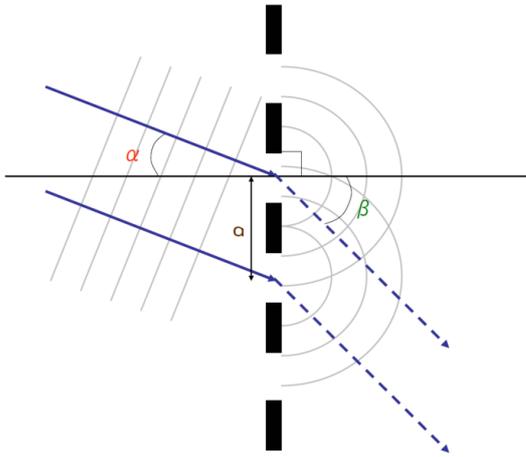


FIGURE 10 – Réseau de diffraction en transmission constitué de N fentes.

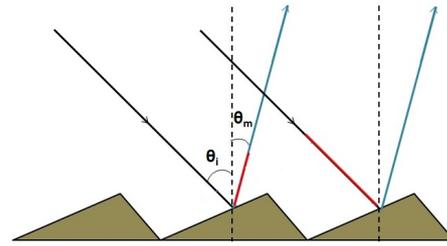


FIGURE 11 – Réseau de diffraction en réflexion, constitué de N miroirs parallèles non coplanaires.

4.2 Influence du nombre N d'ondes

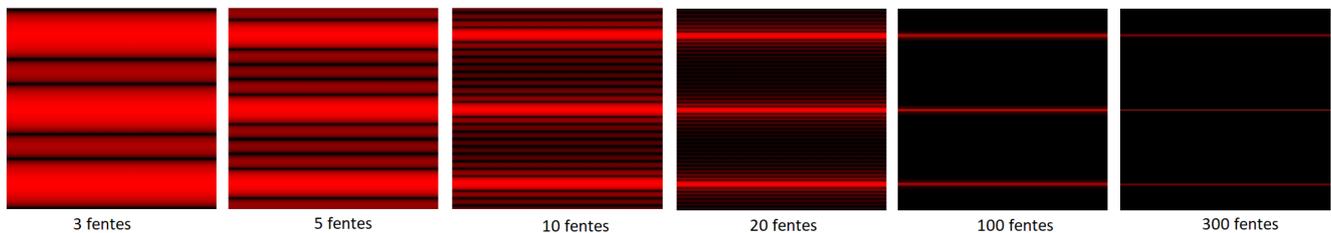


FIGURE 12 – Simulation étudiant l'influence du nombre N de fentes sur la figure d'interférence.

prop : Plus le nombre N d'ondes interférant est grand, plus les franges brillantes sont fines et intenses, et plus nombreuses sont les annulations d'intensité entre deux franges brillantes.

simulation : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/interfres.html>

interprétation : Plus il y a d'ondes qui interfèrent, plus elles vont se compenser pour donner une intensité résultante très faible... sauf dans les cas particuliers où elles sont en phase⁴.

prop : **Condition d'interférences constructives** : Un maximum d'intensité correspond à un déphasage $\Delta\phi$ entre ondes successives multiple de 2π : $\Delta\phi = p \cdot 2\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

4.3 Calcul des angles de diffraction des maxima d'intensité

schéma : Montage expérimental : angle d'incidence θ_0 , réseau en transmission de pas a , angle de rayon transmis θ .

prop : Pour un réseau de diffraction en transmission de pas a éclairé sous incidence θ_0 , les interférences constructives de longueur d'onde λ_0 sont observées dans la direction θ donnée par :

$$\text{formule des réseaux : } \sin \theta - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_0}{a} \quad (3)$$

avec l'ordre d'interférence $p \in \mathbb{Z}$ entier.

démo : Commencer par calculer la différence de marche entre deux rayons successifs.

4. CE : Expliquer qualitativement l'influence de N sur l'intensité et la finesse des franges brillantes observées.

5. CE : Établir et utiliser la formule indiquant la direction des maxima d'intensité derrière un réseau de fentes rectilignes parallèles.

4.4 Limitation du nombre d'ordres observables

prop : En pratique, on n'observe qu'un nombre limité d'ordres transmis, dont un intervalle restreint de valeurs de p possibles. En incidence normale, la valeur maximale de $|p|$ est $p_{\max} = \lfloor \frac{a}{\lambda} \rfloor$ (partie entière de a/λ).

démo : Utiliser la formule des réseaux.

application : Avec la raie verte d'une lampe à vapeur de mercure ($\lambda = 546 \text{ nm}$), on éclaire en incidence normale un réseau en transmission de 500 traits par mm. Déterminer le nombre d'ordres observables.

4.5 Influence de la longueur d'onde

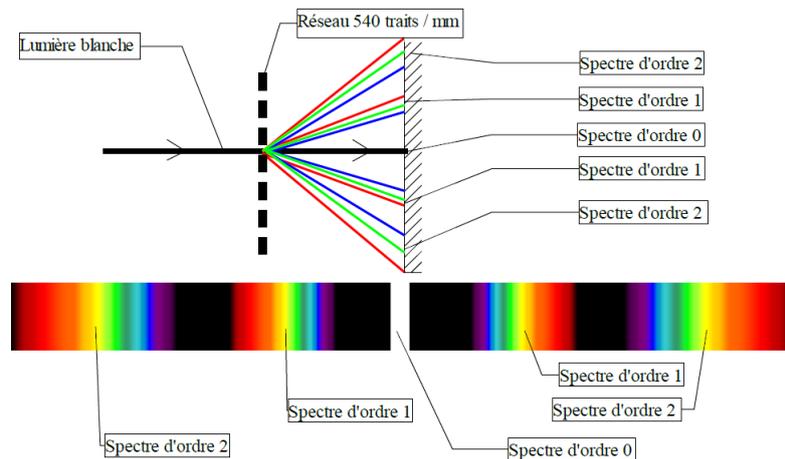


FIGURE 13 – Un réseau de diffraction sépare les composantes de la lumière. En effet, le rouge est plus diffracté que le bleu.

applications : En utilisant une lampe, un réseau et un appareil de mesure d'angles comme un goniomètre (cf TP), on mesure les angles θ associés à différentes longueur d'onde λ et ordre p . Alors :

- ★ Si on connaît les λ de la lampe, on peut en déduire le pas a du réseau.
- ★ Si on connaît le pas a du réseau, on peut en déduire les λ d'une lumière inconnue.

4.6 Détermination de la largeur des franges brillantes

prop : La première annulation après une frange brillante correspond à un déphasage entre ondes successives de

$$\Delta\phi_{\text{annulation}} = \frac{2\pi}{N} \quad \text{6. La largeur d'une frange est donc de } 4\pi/N.$$

interprétation : On retrouve bien $\Delta\phi_{\text{annulation}}$ petit si N grand.

démo : Par le calcul, exprimer l'amplitude complexe de l'onde résultante de la somme des $\underline{s}_i = S \cdot e^{ji\Delta\phi}$.

autre démo : Par représentation graphique dans le plan complexe, remarquer que l'onde résultante \underline{s} est nulle quand $\Delta\phi = 2\pi/N$.

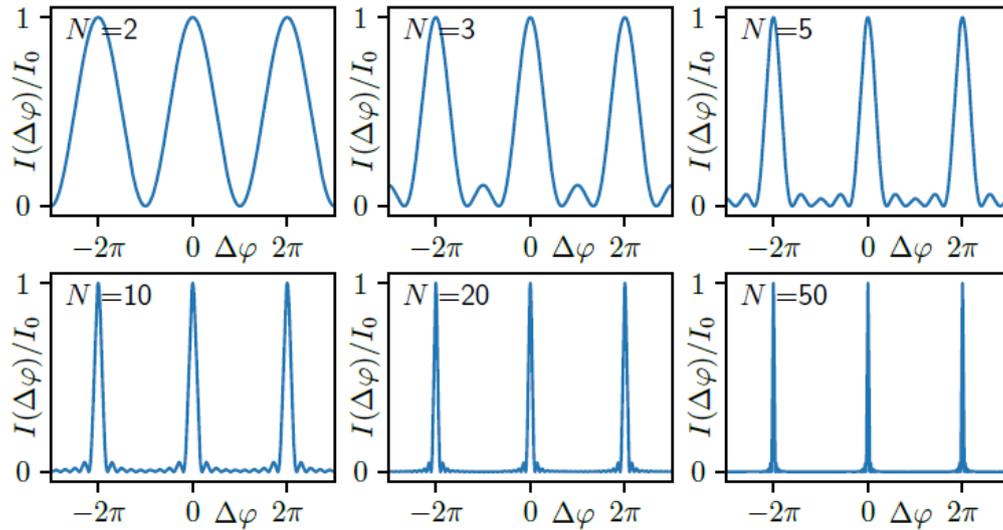
4.7 Exo : expression de l'intensité résultante

exo : Dans le cas de N ondes cohérentes de même amplitude dans la situation où le déphasage $\Delta\phi$ entre deux ondes successives est constant, démontrer que l'intensité résultante en un point est :

$$I = I_{\max} \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

6. CE : Établir par le calcul la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes.

Voici le graphe de l'intensité lumineuse en fonction du déphasage pour différentes valeurs ⁷ du nombre N de fentes :



4.8 Prise en compte de la taille finie des fentes

prop : Soit un réseau de fentes de largeur b espacées de $a > b$. Les pics de diffraction dus au pas a sont principalement visibles dans le cône de diffraction dû à la largeur b . Cela limite la zone d'observation des pics. Voir figure 14.

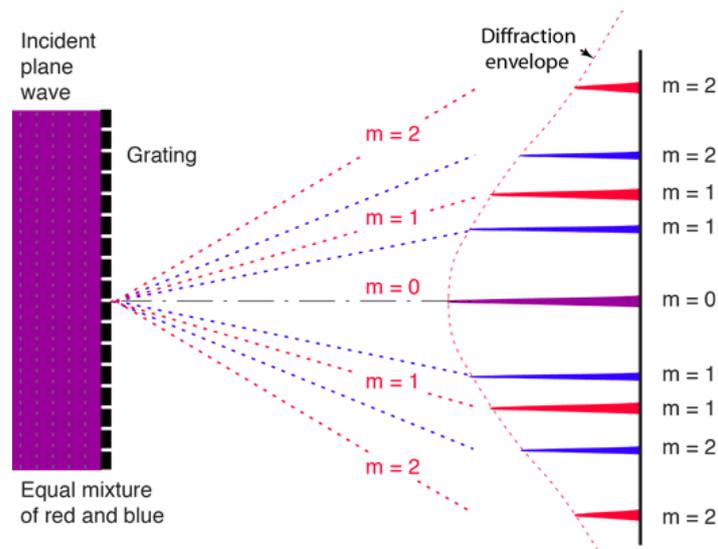


FIGURE 14 – Limitation du nombre de pics visibles par la largeur finie des fentes.

rq : Cf chapitre O3, le même phénomène est présent dans la figure d'interférences des trous d'Young.

7. En exercice de trigo, on peut montrer que dans le cas $N = 2$, on retombe sur la formule de Fresnel).