Révisions de PCSI : mécanique

Exercice fondamental prioritaire pour réviser la mécanique de PCSI :
• Retrouver l'équation du mouvement ($\ddot{\theta} + (g/l)\sin\theta = 0$) d'un pendule simple à l'aide du principe fondamental de la dynamique.
• Idem avec le théorème de la puissance mécanique, idem avec le théorème du moment cinétique.
• Sans résoudre d'équation du mouvement, à quelle vitesse lancer une balle pour qu'elle atteigne au moins une hauteur de 10 m ?
• Retrouver l'équation du mouvement d'un pendule pesant ($\ddot{\theta} + (mga/I)\sin\theta = 0$) à l'aide du théorème du moment cinétique scalaire pour un solide en rotation. Idem avec un théorème énergétique.

Cela permettra de réviser les savoirs/savoir-faire fondamentaux :
⋆ **Connaître expressions de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ en coordonnées cylindrique. Et notamment dans le cas particulier d'un mouvement circulaire.**
⋆ **Savoir projeter des vecteurs dans une base donnée, et passer de la base cartésienne à cylindrique.**
⋆ **Calculer un produit vectoriel dans une base donnée.**

Table des matières

1 Utilisation des vecteurs

1.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées (x_2, y_2, z_2) dans une **base cartésienne**.

def : Le produit scalaire $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$ est une application qui prend en argument deux vecteurs (donc 6 nombres) et qui mène à un nombre réel (un seul nombre). On utilise principalement deux expressions du produit scalaire :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|.\|\overrightarrow{u_2}\|.\cos(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})}$$

prop : symétrie : $\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}}$

prop : linéarité à droite : $\boxed{\overrightarrow{u}.(a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}) = a\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}}$ (idem à gauche).

prop : lien avec la norme : $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (analogie en 2D avec module d'un nombre complexe, et théorème de Pythagore).

prop : orthogonalité : $\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} \text{ et } \overrightarrow{u_2} \text{ sont orthogonaux}}$

1.2 Dérivation des vecteurs

On peut dériver les vecteurs par rapport au temps. Notamment, les formules de dérivation de produit s'appliquent :

$$\boxed{\frac{d(a\overrightarrow{u})}{dt} = a.\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \frac{da}{dt}.\overrightarrow{u}}$$

$$\boxed{\frac{d(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})}{dt} = \overrightarrow{u_1}.\frac{d\overrightarrow{u_2}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{u_1}}{dt}.\overrightarrow{u_2}}$$

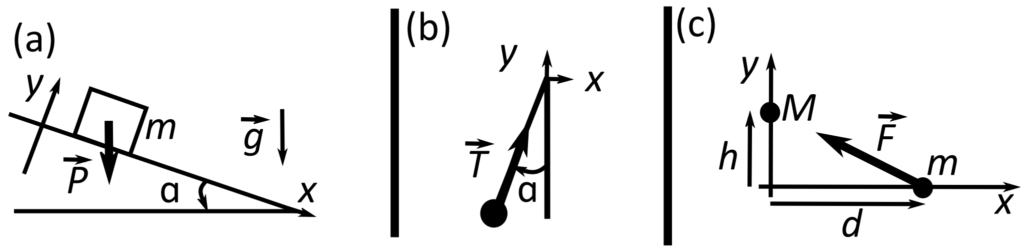
1.3 Projection dans une base

prop : Lien entre vecteur et projection. Par exemple dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ pour le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ de coordonnées (x, y, z) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{u_x}\right)}_{x}\overrightarrow{u_x} + \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{u_y}\right)}_{y}\overrightarrow{u_y} + \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{u_z}\right)}_{z}\overrightarrow{u_z} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_y} + z.\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

exo : *Exprimer dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ les forces représentées sur les schémas ci-dessous :*

1. *Le poids $\overrightarrow{P}$ de la masse m dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ en fonction de l'angle α.*
2. *La tension $\overrightarrow{T}$, de norme T, du fil du pendule sur la masse suspendue en fonction de l'angle α (attention à son signe).*
3. *La force gravitationnelle $\overrightarrow{F}$ de M sur m en fonction de la constante gravitationnelle G, des masses m et M, et des distances h et d.*



1.4 Le produit vectoriel

1.4.1 Définition du produit vectoriel

def : Soit $\overrightarrow{c}$ le **produit vectoriel** des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, noté $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$. C'est un vecteur défini par :
• Norme : $\boxed{\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\| . \left\|\overrightarrow{b}\right\| . \left|\sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\right|}$
• Direction : $\overrightarrow{c}$ perpendiculaire au plan formé par $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.
• Sens : Le trièdre $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est direct.

prop : Le caractère direct d'un trièdre peut se vérifier par la ***règle de la main droite*** : le pouce, l'index et le majeur écartés en un trièdre indiquent respectivement le sens de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.

ex : Les bases cartésiennes, cylindriques et sphériques sont des trièdres directs.

1.4.2 Propriétés du produit vectoriel

prop : Soient deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de normes respectives a et b, les informations du produit scalaire et du produit vectoriel sont complémentaires :

	valeur de $\left\|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right\|$	valeur de $\left\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right\|$
$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ colinéaires	ab	0
$\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ orthogonaux	0	ab

• Orthogonalité : $\boxed{\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) . \overrightarrow{a} = 0}$ et $\boxed{\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) . \overrightarrow{b} = 0}$
• Colinéarité : $\boxed{\forall \overrightarrow{a} \qquad \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}}$
• Antisymétrie : Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs. Alors $\boxed{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}$.
• Bilinéarité :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \wedge \overrightarrow{c} &= \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} \\
\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) &= \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} \\
\overrightarrow{a} \wedge \left(\lambda \overrightarrow{b}\right) &= (\lambda \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})
\end{aligned}$$

• Dérivation : **ATTENTION : ne pas changer l'ordre de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$!!**

$$\frac{d\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{a}}{dt} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \frac{d\overrightarrow{b}}{dt}$$

Remarque importante : Le produit vectoriel est très différent du produit scalaire : il **renvoie un vecteur** (et non un scalaire pour le produit scalaire) ; il est antisymétrique ; et s'annule (au sens des vecteurs) pour un produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires.

Remarque internationale : Dans la littérature anglo-saxonne, le produit vectoriel n'est pas noté $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ mais plutôt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Les flèches sur les vecteurs permettent d'éviter toute confusion avec la multiplication de scalaires.

1.4.3 Opérations sur les vecteurs de base

ex : *Calculer* $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z}$, $(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}) \wedge \overrightarrow{u_z}$, $(\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{u_z}) \wedge \overrightarrow{u_r}$.

1.4.4 Expression analytique du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de coordonnées respectives **dans une base orthonormée directe** (x_a, y_a, z_a) et (x_b, y_b, z_b). Alors le vecteur $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est de coordonnées :

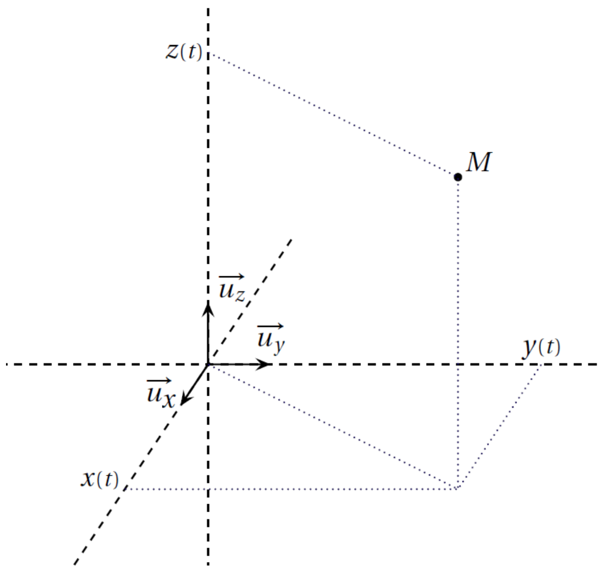
$$\boxed{\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}}$$

2 Description d'une position

def : Dans un repère de centre O, le **vecteur position** d'un point M est $\overrightarrow{OM}$. Il peut aussi être noté $\overrightarrow{r}$ à ne pas confondre avec une coordonnée r.

Le vecteur de base associé à une coordonnée i sera noté $\overrightarrow{u_i}$ ou $\overrightarrow{e_i}$. Ne pas utiliser la notation $\overrightarrow{x}$ pour un vecteur de base (sans dimension et de norme 1) car cette écriture laisserait suggérer que la norme de $\overrightarrow{x}$ serait peut-être x...

2.1 Coordonnées cartésiennes

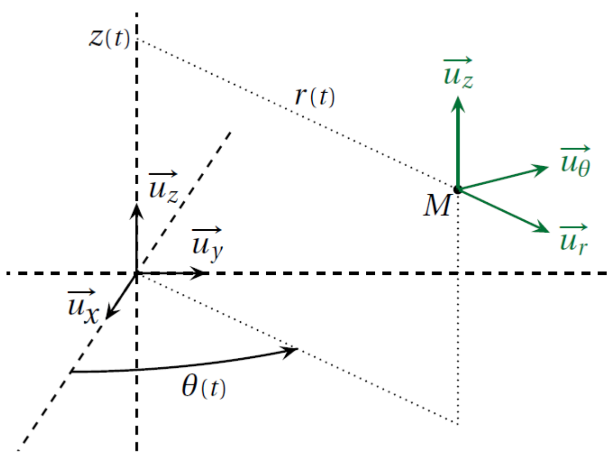


def : **Coordonnées cartésiennes** : trois longueurs (x, y, z) définies par la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur les différents axes :
⋆ $x = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_x} \in \mathbb{R}$.
⋆ $y = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_y} \in \mathbb{R}$.
⋆ $z = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_z} \in \mathbb{R}$.

prop : Dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_y} + z.\overrightarrow{u_z}$$

2.2 Coordonnées cylindriques



def : **Coordonnées cylindriques** : deux longueurs et un angle (r, θ, z) :
⋆ Distance r à l'axe central. $r \in \mathbb{R}^+$ positif.
⋆ Angle $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_r})$. Indéfini si $r = 0$. $\theta \in [0, 2\pi[$ (ou $]-\pi, \pi]$).
⋆ Distance z : altitude (comme en cartésien). $z \in \mathbb{R}$.

prop : Dans la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

rq : L'information de la coordonnée θ est implicitement contenue dans le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ qui dépend de θ : $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}$.

• Lien avec coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.\cos\theta \\ r.\sin\theta \\ z \end{pmatrix}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta &= y/x \\ z &= z \end{cases}$$

| exo : *Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction de ceux de la base cartésienne. Et faire le contraire.*

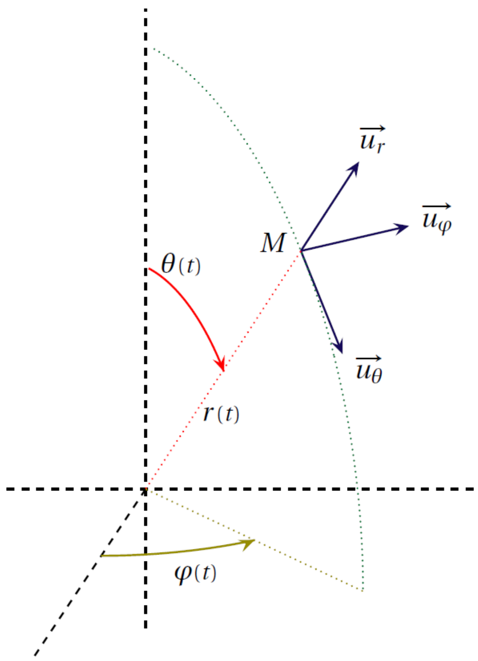
• Dérivation des vecteurs de la base cylindrique :
ATTENTION ! ! : Contrairement aux vecteurs de la base cartésienne, les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ ne sont pas toujours constants, leur norme vaut toujours 1, mais leur direction change si l'angle θ varie : $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} \neq \overrightarrow{0}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} \neq \overrightarrow{0}$!

prop :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}}$$

| IMPORTANT : *Formule à connaître, à savoir démontrer, à savoir interpréter.*

2.3 Coordonnées sphériques



def : **Coordonnées sphériques** : une longueur et deux angles (r, θ, φ) :
⋆ Distance r au centre. $r \in \mathbb{R}^+$.
⋆ Angle $\theta = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_r})$. Indéfini si $r = 0$. $\theta \in [0, \pi[$.
⋆ Angle φ entre $\overrightarrow{u_x}$ et OH où H est la projection de M sur le plan (Oxy). Indéfini si $r = 0$. $\varphi \in [0, 2\pi[$.

rq : **ATTENTION** : l'origine de l'angle θ en coordonnée sphérique (axe (Oz)) n'est pas la même que pour l'angle θ des coordonnées cylindriques (axe (Ox)) !

prop : Dans la base sphérique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

rq : L'information des coordonnées θ et φ est implicitement contenue dans le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ qui dépend de ces angles.

Lien avec coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.\sin\theta\cos\varphi \\ r.\sin\theta\sin\varphi \\ r.\cos\theta \end{pmatrix}} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} r & = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\theta & = z/r = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi & = y/x \end{array} \right.$$

| exo : *Exprimer les vecteurs de la base sphérique en fonction de ceux de la base cartésienne. Et faire le contraire.*

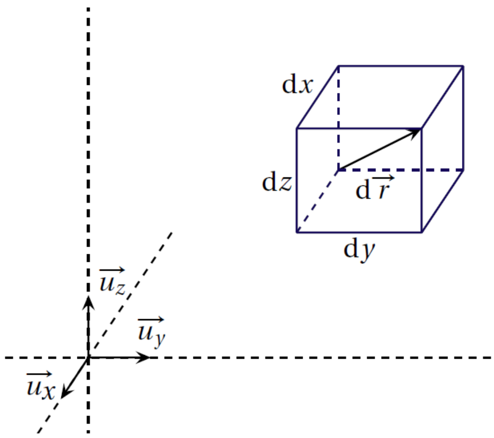
3 Description d'un mouvement

3.1 Le déplacement élémentaire

def : Le **déplacement élémentaire** de M, noté $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ou $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$, est un vecteur correspondant à une variation infinitésimale de chaque coordonnée du point M pendant une durée infinitésimale dt. En notant le point d'arrivée M' :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM'}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{MM'}}$$

3.1.1 Cartésienne



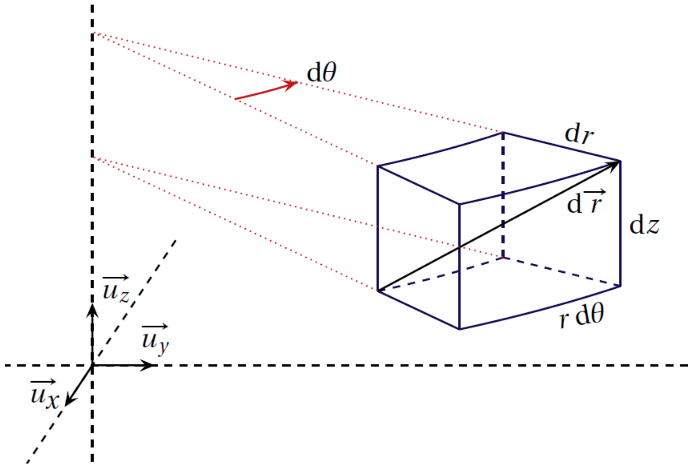
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \mathrm{M'} = \begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \\ z+dz \end{pmatrix}$$

Alors $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dx.\overrightarrow{u_x} + dy.\overrightarrow{u_y} + dz.\overrightarrow{u_z}}$

rq : Permet de paver l'espace en volumes élémentaires $\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\mathrm{d}z}$. Selon deux coordonnées (par exemple x et y), permet aussi de paver une surface en surfaces élémentaires ($dS = dx.dy$). **Cette manière de découper l'espace en petits morceaux est omniprésente en physique !**

3.1.2 Cylindrique

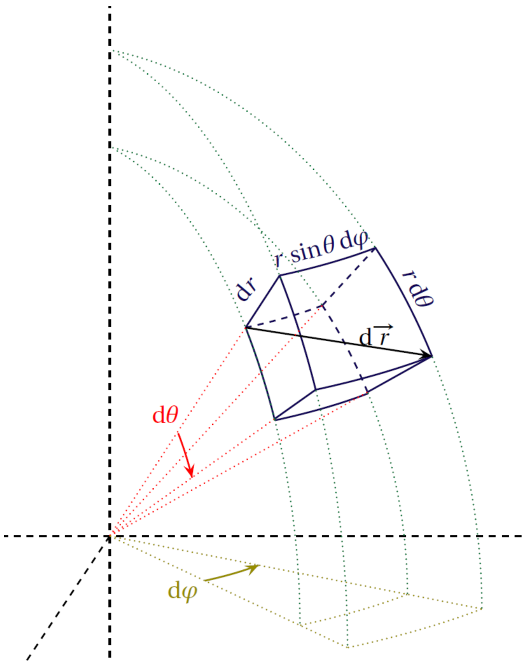
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \to \mathrm{M'} = \begin{pmatrix} r+dr \\ \theta+d\theta \\ z+dz \end{pmatrix}$$



Alors $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + rd\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\overrightarrow{u_z}}$

ATTENTION : Même si une des coordonnées est un angle, la projection de $d\overrightarrow{OM}$ sur $\overrightarrow{u_\theta}$ doit être une longueur ! !

3.1.3 Sphérique



$$M = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow M' = \begin{pmatrix} r + dr \\ \theta + d\theta \\ \varphi + d\varphi \end{pmatrix}$$

Alors $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + rd\theta.\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}}$

3.2 Vecteur vitesse

def : Dans un référentiel donné, la vitesse d'un point M est : $\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$.

prop : Lien direct avec déplacement élémentaire : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}dt}$

prop : Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est tangent à la trajectoire.

def : Un mouvement où la norme de la vitesse $\|\overrightarrow{v}\|$ est dit **uniforme**.

rq : Attention, norme constante ne veut pas forcément dire vecteur constant ! Son orientation peut varier.

3.3 Vecteur accélération

def : Dans un référentiel donné, l'accélération d'un point M est :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}}$$

prop : Lien direct avec variation élémentaire de vitesse : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a}\,\mathrm{d}t}$

prop : Le vecteur $\overrightarrow{a}$ caractérise la courbure de la trajectoire :
- Sa direction dirige la concavité de la trajectoire.
- Plus la norme de $\overrightarrow{a}$ est grande, plus la trajectoire est courbée.

3.4 Expressions dans les systèmes de coordonnées

En coordonnées cartésiennes et cylindriques (donc pas en sphérique), connaître les formules ET les démos selon les deux méthodes :

⋆ Méthode 1 : En divisant le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par dt pour $\overrightarrow{v}$.

⋆ Méthode 2 : En dérivant le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par rapport au temps.

3.4.1 Cartésiennes

prop : Les vecteurs cinématiques en coordonnées cartésiennes sont :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{x}.\overrightarrow{u_x} + \dot{y}.\overrightarrow{u_y} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a} = \ddot{x}.\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}.\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z}}$$

3.4.2 Cylindrique

def : $\dot{\theta}$ est parfois noté ω et appelé « vitesse angulaire » (même si ce n'est pas homogène à une vitesse).

prop : Les vecteurs cinématiques en coordonnées cylindriques sont :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2).\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}).\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z}}$$

3.5 Exemple du mouvement circulaire

3.5.1 Expressions des vecteurs cinématiques dans le cas général

Utiliser les formules en coordonnées cylindrique avec ici $r = R = \text{cte}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R\overrightarrow{u_r} \quad (= R\cos\theta\overrightarrow{u_x} + R\sin\theta\overrightarrow{u_y}) \\ \vec{v} &= R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \end{aligned}$$

prop : $a_N = -R\dot{\theta}^2 < 0$ comme attendu d'après la courbure.

prop : $a_T = R\ddot{\theta} = \dfrac{d(R\dot{\theta})}{dt} = \dfrac{dv}{dt}$ est bien la dérivée de la valeur de la vitesse.

3.6 Expressions des vecteurs cinématiques dans le cas uniforme

def : Un mouvement est dit **uniforme** si $\|\vec{v}\| = \text{cte}$.

prop : Un mouvement **circulaire uniforme** vérifie donc $\boxed{\omega = \dot{\theta} = \text{cte}}$, et $\ddot{\theta} = 0$.

D'où pour un choix judicieux d'origine des temps : $\theta = \omega t$.

prop : Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est radiale (accélération tangentielle nulle) et vaut $\boxed{\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}$.

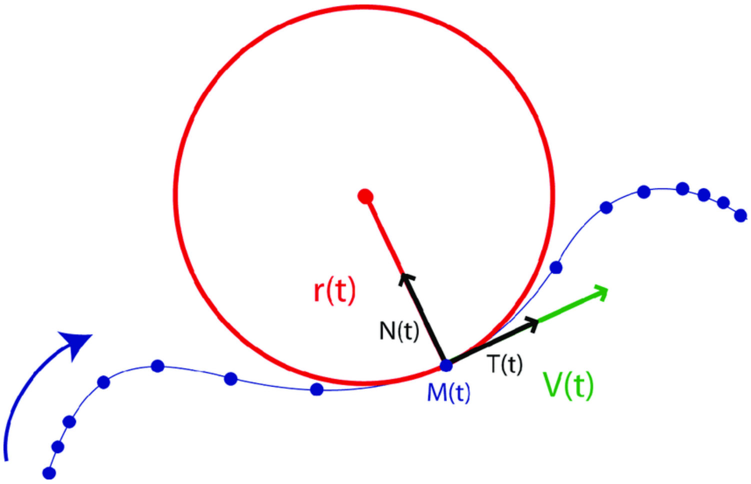
Lien avec une prop générale des vecteurs :

prop : $\|\overrightarrow{v}\| = \text{cte} \Leftrightarrow \overrightarrow{v}.\overrightarrow{a} = 0$

3.7 Mouvement plan et base de Frenet

Capacité exigible : *Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.*

Pour l'étude d'un mouvement plan dont on connaît la trajectoire, il peut être intéressant d'utiliser la base de Frenet (Jean-Baptiste Frenet (1816-1900), mathématicien, astronome français).



def : En un point M d'une courbe, on appelle **cercle osculateur** le cercle qui épouse le mieux la courbe. Le rayon r de ce cercle s'appelle **rayon de courbure** en M.

interprétation : Plus la trajectoire est courbée, plus le rayon de courbure est petit.

def : La **base de Frenet** est constituée de deux vecteur unitaires orthogonaux entre eux, notés $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$. Les deux vecteurs sont liés au point M dont on décrit le mouvement.
⋆ $\overrightarrow{T}$ est tangent à la trajectoire au point M, et dirigé dans le sens du mouvement,
⋆ $\overrightarrow{N}$ est orthogonal à la trajectoire et dirigé vers le centre du cercle osculateur, donc vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

prop : Vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet.
⋆ Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. En notant v la norme de $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{T}$$

⋆ Le vecteur accélération comporte deux composantes, avec le rayon de courbure r :

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{r}\overrightarrow{N}$$

rq : Il ne faut pas confondre la base de Frenet et la base polaire :

→ Le vecteur $\overrightarrow{T}$ est toujours tangent à la trajectoire, ce qui n'est pas le cas de $\overrightarrow{u_\theta}$, sauf pour un mouvement circulaire.

→ Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est dans la direction et le sens du vecteur position $\overrightarrow{\text{OM}}$, ce qui n'est pas le cas du vecteur $\overrightarrow{N}$ qui est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbure.

schéma : *Considérons la trajectoire elliptique de la Terre (point M) autour du Soleil (point O origine du repère polaire). En une position quelconque, placer sur un schéma les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ du repère de Frenet, ainsi que $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ du repère polaire.*

exo : Capacité exigible : Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens du parcours d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Soit une particule chargée de charge q injectée dans la zone où règne le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ avec un vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$. On se place dans le référentiel du laboratoire, galiléen à l'échelle de l'expérience. Le poids et les forces de frottement sont négligés devant la force magnétique.

1. *Rappeler les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération en se plaçant dans la base de Frenet. Démontrer que la vitesse est de norme constante pour en déduire l'expression de l'accélération.*
2. *Appliquer le PFD pour obtenir une équation vectorielle qui relie la norme du vecteur vitesse v, le rayon de courbure $R(t)$, les constantes m et q, et les vecteurs $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{B}$.*
3. *En calculant la norme de l'équation précédente, déterminer le rayon de courbure de la trajectoire de la particule chargée. Que peut-on dire de ce rayon de courbure ? En déduire la nature de la trajectoire.*

4 Les lois de la mécaniques

4.1 Théorèmes énergétiques

• Pour un mouvement unidimensionnel (rectiligne, circulaire ou elliptique), souvent plus pratique que le PFD.
• On distingue deux versions :

⋆ Pour calculer des différences entre deux états donnés (sans s'intéresser aux états intermédiaires), utiliser la version « énergie » avec des Δ. Ex : je lance un objet vers le haut à vitesse v dans le champ de pesanteur g, quelle est la hauteur maximale h atteinte ?

⋆ Pour calculer des évolution temporelle (il faut une équation différentielle), utiliser la version « puissance » avec des dérivées.

4.1.1 Pour un point matériel

Soit un point matériel subissant une résultante des forces $\overrightarrow{F}$, dont une partie $\overrightarrow{F}_{\text{non cons}}$ est non conservative, dans un référentiel galiléen.

th : **Théorème de l'énergie mécanique / de la puissance mécanique** :

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W\left(\overrightarrow{F}_{\text{non cons}}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{dE_m}{dt} = P\left(\overrightarrow{F}_{\text{non cons}}\right)}$$

th : **Théorème de l'énergie cinétique / de la puissance cinétique** :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W\left(\overrightarrow{F}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{dE_c}{dt} = P\left(\overrightarrow{F}\right)}$$

4.1.2 Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Les théorèmes énergétiques s'appliquent de la même manière sauf qu'il faut prendre en compte les puissances des moments/couples appliqués au solide.

prop : L'**énergie cinétique d'un solide** de moment d'inertie I_Δ en rotation autour de Δ à pulsation ω est :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_\Delta.\omega^2}$$

rq : **Un solide en rotation à $\omega \neq 0$ possède une énergie cinétique même si sa vitesse moyenne est nulle !**

prop : L'**énergie potentielle de pesanteur** dans $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ d'un solide de masse m et centre d'inertie G est $\boxed{E_p = mgz_G}$

prop : La **puissance des forces d'un solide en rotation** vérifie : $\boxed{P = \omega \times M_\Delta}$ où M_Δ est la résultante des moments de forces subie par le solide.

<u>rq</u> : *Par application du théorème de l'énergie cinétique, montrer qu'on retombe sur l'équation du théorème du moment cinétique* $I_\Delta.\ddot{\theta} = M_\Delta$.

4.1.3 Exo sur le choix de théorème énergétique

<u>exo</u> : *Un skieur de masse m glisse sans frotter sur une pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est initialement immobile en O puis glisse jusqu'en A à la distance d le long de la pente.*

1. *Sans calculer d'équation du mouvement, exprimer l'expression de la norme de la vitesse en A à l'aide du théorème adapté (deux choix possibles).*
2. *Déterminer l'équation du mouvement du skieur à l'aide du théorème adapté.*

Réponses : $\boxed{v_A = \sqrt{2gd\sin\alpha}}$ qui est bien sûr nulle si $\alpha = 0$, et $\boxed{\dot{v} = g\sin\alpha}$, chute dans champ de pesanteur apparent $g' = g\sin\alpha$.

4.2 Théorème du moment cinétique

Pour un mouvement circulaire ou elliptique, souvent plus pratique que le PFD.

4.2.1 Pour un point matériel

<u>def</u> : Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel donné. Alors le **moment cinétique** $\overrightarrow{L_o}(M)$ de M par rapport au point O est :

$$\boxed{\overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}}$$

<u>def</u> : Soit un point matériel M soumis à une force $\overrightarrow{F}$. Le **moment** $\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{F})$ **de la force** $\overrightarrow{F}$ par rapport à un point O est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}}$$

<u>th</u> : Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, soient un point O **fixe** et un point matériel M soumis à une résultante de forces $\overrightarrow{F}$, le **théorème du moment cinétique** est :

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \overrightarrow{M}_o\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

<u>rq</u> : il est aussi appelé « **Loi du moment cinétique** ».

4.2.2 Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

<u>def</u> : **moment d'inertie** I_Δ d'un solide par rapport à un axe Δ : $\boxed{I_\Delta = \sum_i m_i r_i^2}$.

Il exprime la **répartition de masse autour de Δ.**
On le note souvent I_Δ ou J_Δ.
Il est constant pour un solide (indéformable).

<u>prop</u> : Le moment cinétique L_Δ d'un solide de moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ vaut : $\boxed{L_\Delta = I_\Delta \times \omega}$.

De manière générale, la loi du moment cinétique appliquée à un solide est :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \overrightarrow{M_o} \quad \text{ou} \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta}$$

Dans le cas important d'un solide de moment d'inertie I_Δ en rotation autour d'un axe fixe : $L_\Delta = I_\Delta \times \omega$, alors : $dL_\Delta/dt = I_\Delta\dot{\omega} = I_\Delta\ddot{\theta}$ car I_Δ est constant.

$$\boxed{I_\Delta\ddot{\theta} = M_\Delta \qquad \text{pour une rotation autour d'un axe fixe}}$$

4.3 La loi de la quantité de mouvement

On l'utilise pour un mouvement quelconque. Elle est aussi appelée ***principe fondamental de la dynamique*** noté *PFD*, ou ***relation fondamentale de la dynamique***, ou ***deuxième loi de Newton***, ou ***loi de la quantité de mouvement***, ou ***théorème du centre d'inertie***.

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système matériel obéit à la loi d'évolution :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la somme des forces extérieures appliquées au système.

<u>def</u> : Quantité de mouvement d'un système de masse m et de vitesse v du centre d'inertie : $\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}}$.