

## Révisions de PCSI : induction

### Table des matières

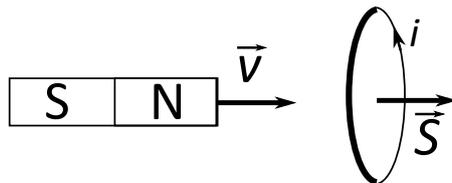
<b>1 Induction dans un circuit électrique fixe</b>	<b>1</b>
1.1 Détermination qualitative du sens d'un courant induit . . . . .	1
1.2 Induction mutuelle entre un solénoïde et une spire . . . . .	1
1.3 Problème : Couplage par inductance mutuelle . . . . .	2
1.4 Bilan de puissance pour deux bobines couplées . . . . .	3
<b>2 Actions mécaniques d'un champ magnétique</b>	<b>4</b>
2.1 Détermination du sens d'une force de Laplace . . . . .	4
2.2 Équilibre d'un cadre rigide . . . . .	4
2.3 Action d'un champ magnétique sur un cadre rectangulaire . . . . .	5
<b>3 Conversion électromécanique par induction</b>	<b>6</b>
3.1 Configuration simple de freinage par induction . . . . .	6
3.2 Problème : Le <i>canon électrique</i> ou <i>railgun</i> . . . . .	7
3.3 Problème : Modélisation théorique et expérimentale d'un haut-parleur . . . . .	9

## 1 Induction dans un circuit électrique fixe

### Savoirs et savoir-faire

- Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
- Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation ( $e = -d\phi_B/dt$  avec  $e$  en convention générateur sur le contour orienté).
- S'appuyer sur un schéma électrique équivalent (avec fem induite) pour décrire le fonctionnement d'un circuit siège d'inductance propre, ou deux circuits à une maille couplés par inductance mutuelle : lois des mailles, des nœuds, bilan de puissance, régime sinusoïdal forcé.
- Dans des géométries simples, calculer le coefficient d'inductance mutuelle pour des expressions de  $\vec{B}$  fournies.

#### 1.1 Détermination qualitative du sens d'un courant induit



1. En utilisant la loi de Lenz, déterminer le signe du courant induit dans la spire par le déplacement de l'aimant à vitesse  $\vec{v}$ .
2. Même question en utilisant cette fois la loi de Faraday.

#### 1.2 Induction mutuelle entre un solénoïde et une spire

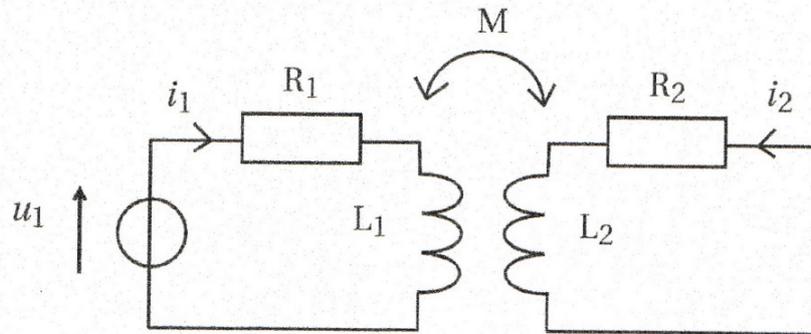
Une spire rigide plane circulaire de centre  $O$  de rayon  $a$  et de résistance  $r$  est placée dans le champ magnétique  $\vec{B}$  régnant à l'intérieur d'un solénoïde infini (comprenant  $N$ , de longueur  $L$  grande devant son rayon  $R > a$ ) parcouru par un courant  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . L'axe de la spire et celui du solénoïde coïncident. On donne  $B(t) = \mu_0 N I(t) / L$ .

1. Expliquer qualitativement pourquoi et dans quel sens apparaît un courant dans la petite spire, puis exprimer l'intensité de ce courant  $i(t)$ .
2. Même question si la spire tourne maintenant autour d'un axe fixe de son plan à une vitesse angulaire constante  $\omega$  et qu'un courant stationnaire d'intensité  $I_0$  circule dans le solénoïde.
3. Quel phénomène a-t-on négligé ici ? Quels systèmes réels ces dispositifs modélisent-ils ?

### 1.3 Problème : Couplage par inductance mutuelle

#### 1.3.1 Radar de franchissement de feu rouge

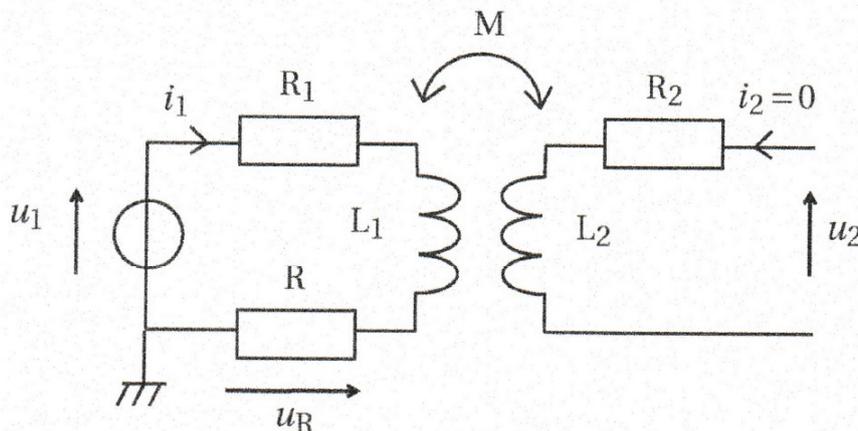
On place deux circuits électriques côte à côte. Le circuit 1 composé d'une bobine de résistance  $R_1$  et d'inductance  $L_1$  est alimenté par un générateur délivrant une tension  $u_1(t) = u_m \cos(\omega t)$ . Le circuit 2 constitué d'une bobine de résistance  $R_2$  et d'inductance  $L_2$  n'est relié à aucun générateur. Il est placé suffisamment proche du circuit 1 pour qu'on tienne compte du coefficient d'inductance mutuelle  $M$  entre les circuits.



1. Exprimer le flux propre de chaque circuit, ainsi que les flux mutuels en fonction de  $i_1$  et  $i_2$ .
2. En déduire l'expression des forces électromotrices induites dans chaque circuits  $e_1$  et  $e_2$ . En déduire un schéma électrique équivalent du dispositif.
3. On se place en régime sinusoïdal permanent. En utilisant la notation complexe, montrer que  $\underline{i}_2 = \underline{K} \cdot \underline{i}_1$  avec  $\underline{K}$  un coefficient complexe dont on donnera l'expression.
4. À l'aide de l'expression de  $\underline{K}$ , justifier la nature du filtrage (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc) effectué lors du couplage entre  $i_1$  et  $i_2$ .
5. Exprimer l'impédance  $\underline{Z}_1 = \underline{u}_1/\underline{i}_1$  du circuit 1 vue depuis le générateur.
6. On néglige la résistance des deux circuits. Montrer que tout se passe comme si l'inductance du circuit 1 diminuait quand le circuit 2 se rapproche.
7. Ce dispositif est utilisé dans des radars automatiques de franchissement de feu rouge. Expliquer leur fonctionnement. Connaissez-vous d'autres applications du couplage par inductance mutuelle ?

#### 1.3.2 Mesure d'un coefficient d'inductance mutuelle

On souhaite désormais mesurer le coefficient  $M$  de deux bobines placées sur le même axe de symétrie séparées par une distance  $d$ . Pour cela, on branche un voltmètre sur la bobine 2 en circuit ouvert pour mesurer la tension  $u_2(t)$ . Le circuit 1 est modifié en ajoutant une résistance  $R$  en série avec la bobine 1 de manière à visualiser la tension  $u_R(t) = Ri_1(t)$ . Le générateur délivre désormais une tension telle qu'on observe que la tension  $u_R(t)$  est un signal triangulaire d'amplitude  $E$  de fréquence  $f = 1,0$  kHz. Le signal récupéré aux bornes du circuit 2 est un créneau d'amplitude  $E_2$ .



8. Exprimer  $u_2(t)$  en fonction de  $M$  et  $i_1(t)$  (sans passer en notation complexe). Justifier qu'on récupère un signal créneau et exprimer  $M$  en fonction de  $E_2$ ,  $E$ ,  $R$  et la période  $T$ . Donner sa valeur numérique pour  $d = 5,0$  cm sachant que  $R = 100 \Omega$ ,  $E = 3,0$  V et  $E_2 = 0,060$  V.

## 1.4 Bilan de puissance pour deux bobines couplées

On propose dans cette sous-partie une modélisation plus générale du couplage magnétique, s'affranchissant des hypothèses faites dans la sous-partie précédente. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux bobines, d'inductances propres respectives  $L_1$  et  $L_2$  (voir figure 7).

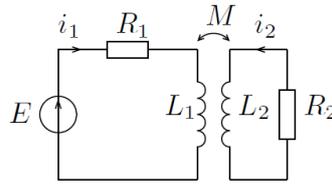


FIGURE 7 – Circuits couplés par mutuelle inductance.

- C1.** Rappeler la définition de  $M$ , ainsi que sa dimension.
- C2.** En appliquant la loi des mailles dans chacun des deux circuits, établir le système d'équations électriques couplées vérifiées par les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .
- C3.** Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance

$$Ei_1 = R_1i_1^2 + R_2i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt}$$

avec  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$  une quantité à exprimer en fonction de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ ,  $i_1$  et  $i_2$ . Interpréter ce bilan.

- C4.** On pose la variable adimensionnée  $x = i_1/i_2$ . Mettre  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$  sous la forme

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x)$$

où  $P(x)$  est un polynôme d'ordre 2 que l'on explicitera.

- C5.** En admettant que  $\mathcal{E}_{\text{mag}}$  est une quantité positive, montrer que l'inductance mutuelle vérifie une inégalité de la forme  $M \leq M_{\text{max}}$ . Exprimer son majorant  $M_{\text{max}}$  en fonction de  $L_1$  et  $L_2$ .
- C6.** Connaissez-vous d'autres applications de tels circuits couplés par mutuelle induction dans les domaines de l'industrie et de la vie courante ? Deux applications détaillées sont attendues.

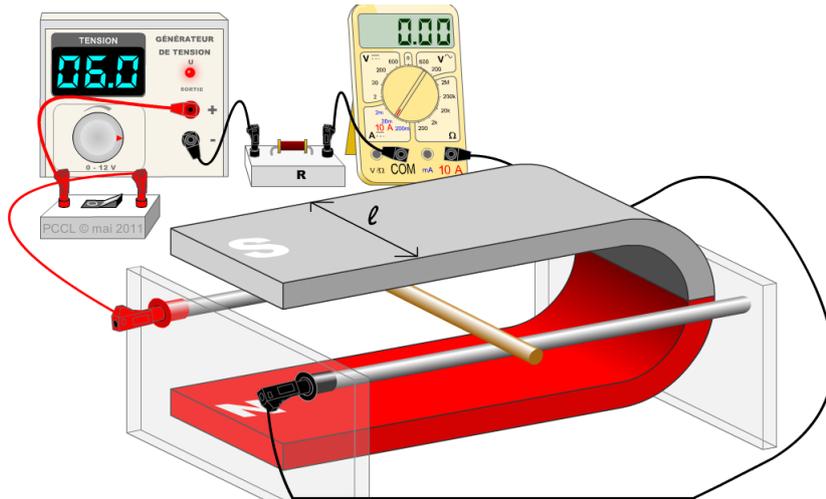
## 2 Actions mécaniques d'un champ magnétique

### Savoirs et savoir-faire

- Exprimer les forces de Laplace sur une tige rectiligne.
- Pour un cadre rectangulaire rigide, démontrer que la résultante des forces est nulle, et que le couple vaut  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ . Appliquer la formule du couple des forces de Laplace pour un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  quelconque. Étudier les positions d'équilibre et leur stabilité.

### 2.1 Détermination du sens d'une force de Laplace

Déterminer, en justifiant, la direction de déplacement de la barre mobile lorsqu'on ferme l'interrupteur sur le circuit suivant :



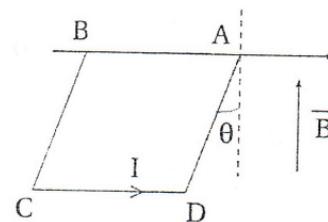
### 2.2 Équilibre d'un cadre rigide

Un cadre carré ABCD de côté  $a = 15 \text{ cm}$  et de masse linéique  $\rho_\ell = 1,0 \text{ g.cm}^{-1}$  est parcouru par un courant d'intensité  $I = 2,0 \text{ A}$ . Il peut tourner autour de son côté AB maintenu horizontalement grâce à une liaison pivot parfaite.

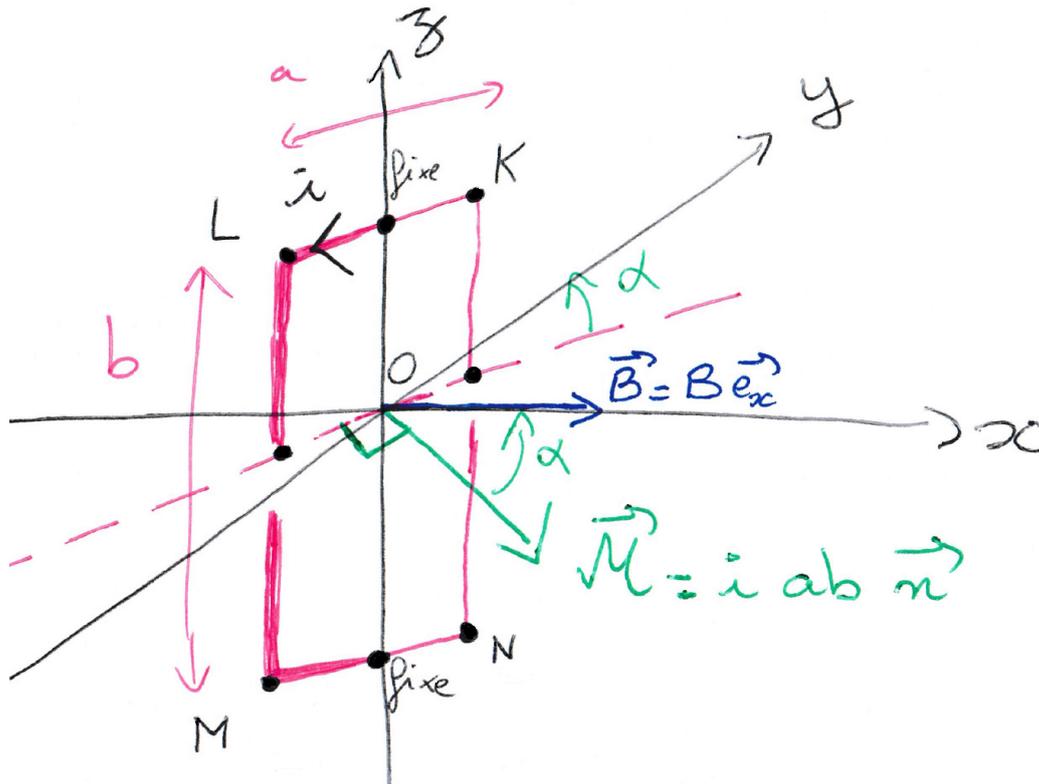
Placé dans un champ magnétique uniforme vertical ascendant d'intensité  $B = 300 \text{ mT}$ , il prend une position d'équilibre définie par l'angle  $\theta$  entre la verticale et le côté AD. On donne l'accélération de pesanteur  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

Calculer la valeur de  $\theta$  de deux manières :

- en déterminant les forces de Laplace et le poids sur chacune des quatre parties du cadre ainsi que leur moment par rapport à l'axe (AB),
- en considérant le poids total et le couple des forces de Laplace en fonction du moment magnétique du cadre.



## 2.3 Action d'un champ magnétique sur un cadre rectangulaire



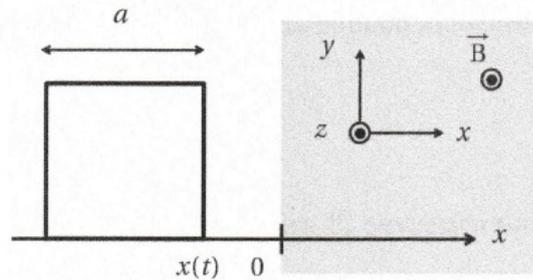
Considérons un cadre rectangulaire rigide KLMN vertical pouvant tourner autour d'un axe  $z$  passant par les milieux des segments KL et MN. Le cadre est de longueur  $a$  et hauteur  $b$  et est parcouru par un courant  $i$ . Le vecteur  $\vec{n} = \cos(\alpha)\vec{e}_x - \sin(\alpha)\vec{e}_y$  est normal au plan du cadre. Le système est plongé dans un champ extérieur uniforme et constant  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ .

1. Exprimer dans la base cartésienne la force de Laplace subie par chaque segment du cadre. Que remarquez-vous ?
2. On admet que le point d'application d'une force de Laplace sur un segment est au milieu du segment. Exprimer le moment de chaque force par rapport au centre O.
3. En déduire l'expression du moment résultant en fonction de  $i$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $B$  et  $\alpha$ , puis en fonction seulement du moment magnétique  $\vec{M}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

### 3 Conversion électromécanique par induction

#### 3.1 Configuration simple de freinage par induction

Un circuit est composé de fils de cuivre formant un carré de côté  $a$ . Le circuit de masse  $m$  possède une résistance  $R$  et une inductance  $L$  négligeable. Il se déplace sur une glissière horizontale sans frottement et on repère par  $x(t)$  la position en abscisse de son côté droit. Il arrive avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  et pénètre à l'instant  $t = 0$  dans la zone grisée sur la figure et caractérisée par  $x > 0$  où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .



- Décrire qualitativement ce qui se passe. On distinguera et on expliquera la situation où le circuit est placé partiellement dans le champ magnétique pour  $0 < x < a$  ainsi que la situation où il est placé entièrement dans le champ magnétique pour  $x > a$ .
- Calculer la force électromotrice  $e$  induite dans le circuit et établir l'équation électrique du circuit équivalent.
- Montrer que la résultante des forces de Laplace sur les quatre portions du circuit est donnée par  $\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x$  pour  $0 < x < a$ .
- En déduire que la force de Laplace peut être assimilée à une force de frottement de type fluide  $\vec{F}_L = -\lambda \vec{v}$  avec  $\lambda$  un coefficient positif à déterminer.
- Exprimer la vitesse  $v(t)$  du cadre pour  $0 < x < a$  ainsi que  $x(t)$  sachant que  $x(0) = 0$ .
- Quelle valeur  $B$  faut-il donner au champ magnétique pour que la vitesse finale soit égale à la vitesse initiale divisée par 2 ?
- Commenter l'intérêt de ce dispositif.

### 3.2 Problème : Le canon électrique ou railgun

#### Préambule : documents de contexte

« A railgun is an electromagnetic projectile launcher. A railgun uses a pair of parallel conductors, or rails, along which a sliding armature is accelerated by the electromagnetic effects of a current that flows down one rail, into the armature and then back along the other rail.

Railguns are being researched as a weapon that would use neither explosives nor propellant, but rather rely on electromagnetic forces to achieve a very high kinetic energy of a projectile. While explosive-powered military guns cannot readily achieve a muzzle velocity of more than about 2 km/s, railguns can readily exceed 3 km/s, and thus far exceed conventionally delivered munitions in range and destructive force. The absence of explosive propellants or warheads to store and handle, as well as the low cost of projectiles compared to conventional weaponry come as additional advantages. » (source : *Wikipedia*)

Modèle	Type d'arme	Cadence de tir
M134 Minigun	Mitrailleuse à canon rotatif	5000/min
FAMAS	Fusil d'assaut	1000/min
M9 Beretta 9 mm	Pistolet semi-automatique	4/s
LRAC F1	Lance-roquette anti-char	3/min

TABLE 1 – Caractéristiques de différentes armes classiques.

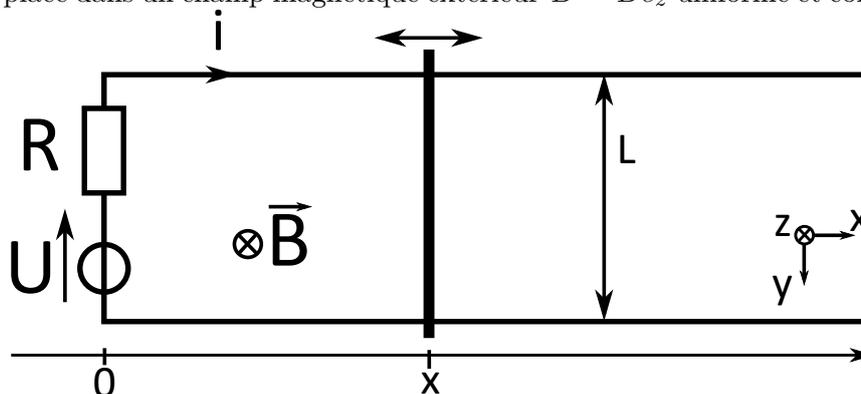
Type	Tension	Capacité de charge
Pile bouton CR1025		30 mAh
Samsung Galaxy S6		2550 mAh
Pile LR6	1,5 V	2850 mAh
Batterie du Oukitel K10000		10000 mAh
Pile LR20	1,5 V	20500 mAh
Batterie de voiture		50 Ah

TABLE 2 – Caractéristiques de différentes piles et batteries. L'unité Ampère-heure est notée Ah.

↪ Le but du problème est de caractériser le railgun : vitesse de projectile, cadence de tir, rendement.

#### 3.2.1 Modélisation du railgun

On modélise le railgun par un circuit électrique comportant une partie mobile constituée d'un barreau de longueur  $L = 10$  cm et de masse  $m = 10$  g pouvant glisser sans frottement le long de deux rails fixes horizontaux parallèles de direction  $(Ox)$ . Ce circuit est constitué<sup>1</sup> d'une source idéale de tension  $U = 500$  V, d'une résistance  $R = 10$   $\Omega$  (supposée constante). Le flux propre sera négligé devant le flux du champ extérieur, l'inductance propre sera donc négligée. L'ensemble est placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  uniforme et constant, de norme  $B = 1$  T.



1. Exprimer le flux  $\phi$  du champ  $\vec{B}$  à travers le circuit en fonction des données du problème.

1. En pratique, la modélisation adoptée ici ainsi que les valeurs numériques ne correspondent pas complètement aux prototypes réels mais permettent des calculs simplifiés.

2. Exprimer la force électromotrice  $e$  induite dans le circuit.
3. En déduire un schéma électrique équivalent et l'équation différentielle électrique associée sur  $i(t)$  et  $x(t)$ .
4. À l'aide d'un bilan des forces sur le barreau mobile, obtenir une autre équation différentielle sur  $i(t)$  et  $x(t)$ .

### 3.2.2 Caractéristiques du tir : cadence de tir et vitesse de projectile

Considérons des conditions initiales  $v(t = 0) = 0$  et  $i(t = 0) = U/R$  (l'inductance du circuit est négligée).

5. Montrer que la vitesse  $v(t)$  de la barre obéit à une équation de la forme  $dv/dt + v/\tau_v = v_{lim}/\tau_v$ . Exprimer les constantes  $\tau_v$  et  $v_{lim}$  en fonction des données du problème.
6. Effectuer l'application numérique de  $\tau_v$ . En déduire une estimation de la cadence de tir du railgun. Comparer à d'autres types d'armes à l'aide du préambule.
7. Application numérique de  $v_{lim}$ , vérifier la cohérence avec la valeur expérimentale fournie dans le préambule.
8. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer complètement  $v(t)$  sachant que le projectile est initialement au repos, et tracer l'allure de  $v(t)$ .
9. Montrer que l'intensité  $i(t)$  de la barre obéit à une équation de la forme  $di/dt + i/\tau_i = i_{lim}/\tau_i$ . Exprimer les constantes  $\tau_i$  et  $i_{lim}$  en fonction des données du problème.
10. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer complètement  $i(t)$  et tracer l'allure son allure.

### 3.2.3 Dimensionnement du canon

On cherche à déterminer la longueur que doit faire le canon pour propulser le projectile à une vitesse satisfaisante. On supposera que cette longueur est telle que la vitesse de sortie du projectile doit être égale à 95% de  $v_{lim}$ . Pour cette sous-partie, on a besoin de connaître  $v(t)$ , et notamment  $v_{lim}$  et  $\tau_v$ .

11. Question peu guidée : déterminer la longueur de canon adaptée pour cette modélisation. Commenter la pertinence du résultat.

### 3.2.4 Besoin en alimentation

On cherche à savoir s'il existe des batteries portables qui permettraient une utilisation mobile du railgun.

12. Pendant une durée  $dt$ , quelle la quantité de charge  $dq$  passant en un point donné d'un circuit parcouru par une intensité  $i(t)$ ? En déduire une expression de la quantité de charge totale  $Q$  fournie lors du tir pour un temps de  $t = 0$  à  $t \rightarrow \infty$  sous forme d'une intégrale.
13. Calculer cette intégrale pour obtenir une expression de la charge totale  $Q$  nécessaire à un tir.
14. En déduire s'il est possible d'utiliser le railgun avec une pile ou batterie portable proposée dans le préambule.

### 3.2.5 Rendement du railgun

15. Effectuer un bilan de puissance à partir des équations différentielles. Expliquer la signification de chaque terme.
16. Exprimer puis calculer (application numérique) l'énergie cinétique fournie à la barre entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ .
17. Exprimer puis calculer (application numérique) l'énergie fournie par le générateur entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ .
18. Définir puis calculer le rendement  $\eta$  du dispositif.

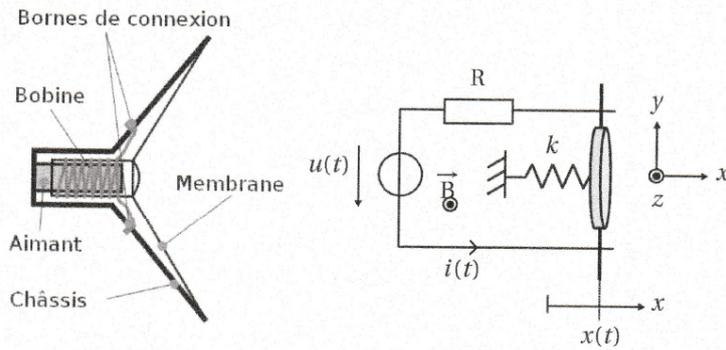


FIGURE 1 – La science-fiction apprécie mettre en scène des railguns, par exemple sous forme portable dans le jeu vidéo *Fallout 2* de 1998 (gauche) ou sous forme beaucoup moins portable dans le film *Transformers 2* de 2009 (droite).

### 3.3 Problème : Modélisation théorique et expérimentale d'un haut-parleur

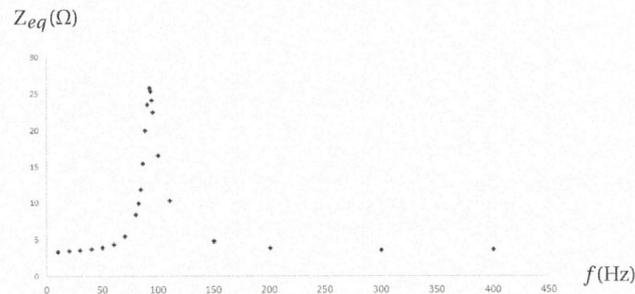
On modélise la membrane d'un haut-parleur par un dispositif simplifié. Sa membrane élastique de masse  $m$  est représentée par un rail de Laplace mobile relié au bâti du haut-parleur par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  exerçant une force de rappel  $\vec{F}_{\text{rappel}} = -kx\vec{e}_x$  avec  $x = l - l_0$ . La membrane est également soumise à une force de frottement  $\vec{F}_{\text{frot}} = -\alpha\vec{v}$  modélisant la perte d'énergie avec l'air liée à l'émission d'une onde sonore.

Un générateur impose une tension  $u(t) = u_m \cos \omega t$ , ce qui implique un courant d'intensité  $i(t)$  dans le circuit de résistance  $R$ . On note  $L$  l'inductance de la bobine du haut-parleur. L'ensemble est placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  uniforme et permanent créé par un aimant par exemple.



- Expliquer qualitativement le fonctionnement du haut-parleur.
- Etablir l'expression de la force électromotrice  $e$  d'induction apparaissant dans le circuit.
- En déduire l'équation électrique du circuit équivalent.

- d) Par un bilan des forces sur le rail de Laplace, établir l'équation mécanique du circuit.
- e) Effectuer un bilan de puissance et en déduire l'équation suivante traduisant ce bilan  $ui = \frac{dE_{mag}}{dt} + \frac{dEm}{dt} + \alpha v^2 + Ri^2$ . Interpréter le sens de cette équation où  $E_{mag}$  représente une énergie magnétique et  $Em$  une énergie mécanique.
- f) On se place en régime sinusoïdal forcé. En utilisant la notation complexe, montrer que les équations électrique et mécanique s'écrivent  $\underline{u} = \underline{Z}_{eq} \underline{i}$  avec  $\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega + \underline{Z}_1$  avec  $\underline{Z}_1$  tel que  $\frac{1}{\underline{Z}_1} = jC_1\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{R_1}$ .
- g) Identifier l'impédance motiionnelle  $\underline{Z}_1$  comme l'impédance équivalente résultant de l'association en parallèle de trois composants simples dont on donnera les caractéristiques. Représenter le circuit électrique équivalent au haut-parleur en utilisant des résistors, condensateurs et bobines.
- h) Montrer un phénomène de résonance pour le module de  $\underline{Z}_1$  à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .
- i) La qualité d'un haut-parleur dépend entre autres de sa rigidité caractérisée par la constante de raideur  $k$  et de la masse  $m$  de sa membrane. Afin d'accéder expérimentalement à ces données, on mesure l'amplitude de la tension et de l'intensité traversant le haut-parleur à différentes fréquences, ce qui permet de tracer la courbe donnant le module  $Z_{eq} = |\underline{Z}_{eq}|$  en fonction de la fréquence  $f$ . Pour un haut-parleur, on obtient la courbe expérimentale suivante avec une fréquence de résonance  $f_r$  inférieure à 100 Hz :



On admet que la fréquence de résonance n'est pas modifiée par le terme en  $R + jL\omega$  dont l'influence est faible aux basses fréquences où se produit la résonance. On place de petites masses  $M$  par exemple des pièces de monnaie fixées avec de la pâte sur la membrane afin de faire varier sa masse totale  $M + m$ . La pulsation de résonance est alors obtenue pour une pulsation  $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$ . On obtient les valeurs suivantes :

pièce (euros)	masse M (g)	$f_r$ (Hz)
aucune	0,00	92
5 centimes	4,13	59
10 centimes	4,53	58
20 centimes	5,99	52
2 euros	8,7	48

Déduire de ces résultats les valeurs de  $k$  et  $m$ .