TDT3 : Transfert thermique

Savoirs

• Flux thermique ϕ_Q, vecteur densité de flux $\overrightarrow{j_Q}$, transfert thermique. Bilan local 1D cartésien, et 3D, éventuellement avec source.
• Loi de Fourier, ODG de λ pour air, eau, béton, acier. Équation de diffusion 1D et 3D. Connaître $L \simeq \sqrt{D\tau}$. Relation de Newton pour interface solide-fluide.
• Régimes stationnaires. Résistances thermiques.
• Expressions des opérateurs div, $\overrightarrow{\text{grad}}$, Δ en coordonnées cartésiennes.
• Méthode des différences finies.
• Rayonnement thermique : approche descriptive, effet de serre, albédo.

Savoir-faire

• Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. *Exos 1, 2.*
• Effectuer un bilan local ou global en régime permanent pour en déduire des contraintes sur $\overrightarrow{j_Q}$. *Exos 2, 3, 4,* **??**, *8.*
• Utiliser la loi de Fourier. *Exos 2 (3.2), 3, 5, 4,* **??**, *8.*
• En géométrie cartésienne, établir l'équation de bilan local à partir du premier principe pour un solide. En déduire l'équation de diffusion, éventuellement avec source. *Exos 5,* **??**.
• Utiliser les expressions fournies de div, $\overrightarrow{\text{grad}}$, Δ. *Exos 3.*
• Exprimer une résistance thermique pour un modèle unidimensionnel. Utiliser des associations de résistances thermiques. *Exos 2, 6, 7, 9.*
• Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide. *Exos 6, 4,* **??**..
• Utiliser les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan pour expliquer qualitativement l'effet de serre. *Exos 10, 11.*
• À l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires. *Exo 12.*

Interro de cours

1. Donner l'unité du flux thermique ϕ_Q et de la densité de flux thermique j_Q. Donner le lien entre ϕ_Q et j_Q.
2. Donner l'équation de bilan thermique local en 1D cartésien et en 3D.
3. Donner la loi de Fourier dans le cas général d'une géométrie quelconque et en 1D cartésien.
4. Donner l'équation de diffusion en 1D cartésien et en 3D.
5. Démontrer l'unité de D à partir de l'équation de diffusion
6. Donner l'ODG de λ pour air, eau, béton, acier.
7. Expression des opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div et Δ en cartésien.
8. Donner la définition de la résistance thermique R_{th} d'un matériau en fonction de la différence de température ΔT et du flux thermique ϕ. Quelle est son expression pour un barreau de longueur L et section S ?

Formulaire

$$\begin{aligned}
\text{cylindrique :} \quad & \text{div}(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{r}.\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
\text{sphérique :} \quad & \text{div}(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{r^2}.\frac{\partial(r^2.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r.\sin\theta}.\frac{\partial(a_\theta.\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}.\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{cylindrique :} \quad & \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}.\overrightarrow{e_z} \\
\text{sphérique :} \quad & \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}.\overrightarrow{e_\varphi}
\end{aligned}$$

$$\text{cylindrique :} \quad \Delta f = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{sphérique :} \quad \Delta f = \frac{1}{r^2}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2.\sin\theta}.\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2.\sin\theta}.\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

1 Principe d'une cave

Une version plus quantitative de cet exo sera étudiée dans le chapitre de Physique des Ondes PO2.

On cherche à justifier pourquoi une cave enterrée à quelques mètres sous le sol est de température quasiment constante malgré les variations quotidienne et saisonnières de températures au niveau du sol. On assimile le sol à un matériau homogène de masse volumique $\rho = 3.10^3$ kg.m^{-3}, capacité thermique massique $c = 870$ J.K^{-1}.kg^{-1}, conductivité thermique $\lambda = 0,4$ W.m^{-1}.K^{-1}.

1. Déterminer l'équation de diffusion dans le cas cartésien 1D à partir de l'équation de bilan local d'énergie. En déduire l'expression d'un coefficient de diffusion en fonction des données.
2. En déduire un ordre de grandeur de la longueur de diffusion thermique dans le sol pour deux durées typique de fluctuations de température de surface : 1 jour et 1 an. Commenter.

2 Énoncés courts mais subtils (**)

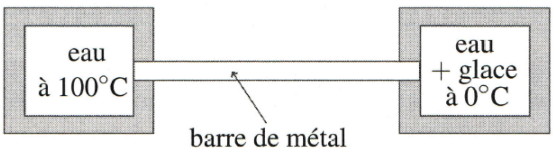
3.1 Cuisson d'un œuf ($\star$)

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 g. Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1,2 et 1,8 kg ?

3.2 Épaisseur d'un igloo ($\star$)

Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs d'un igloo, contenant un seul habitant, si la température extérieure est de -20°C ? La conductivité de la glace sera prise égale à $\lambda = 0,05$ W.m^{-1}.K^{-1}, la température intérieure minimale nécessaire à la survie égale à 10°C et on considérera que le métabolisme de l'habitant dégage une puissance $\mathscr{P} = 50$ W.

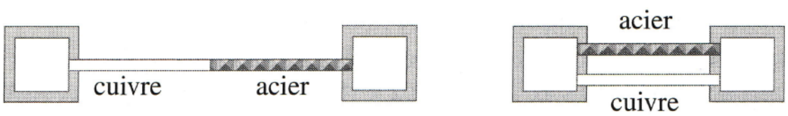
3.3 Associations de résistances thermiques ($\star\star$)



Les parois sont adiabatiques.

Si la barre de métal est en cuivre, la glace fond en 20 minutes. Si elle est en acier, elle fond en 40 minutes.

En combien de temps fond la glace dans les deux configurations suivantes :



3 Noyau terrestre

La terre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon R. Au centre, un noyau sphérique de rayon $a < R$ est le siège de réactions nucléaires engendrant à la surface de ce noyau un flux thermique Φ_0. Pour $a < r < R$ le milieu a une conductivité thermique λ, une masse volumique μ et une capacité thermique massique c. On se place en régime permanent.

1. Choisir la base d'étude et écrire le vecteur densité de flux thermique en un point M ($a < r < R$) en exploitant la symétrie du système.
2. Effectuer un bilan global sur un volume bien choisi pour en déduire que la densité de flux est de la forme $j(r) = A/r^2$ où A est une constante à exprimer en fonction des données du problème.
3. Rappeler l'équation de bilan local d'énergie en géométrie quelconque. Utiliser le formulaire pour la simplifier dans ce cas particulier. En déduire aussi la forme de $j(r)$.
4. Déterminer l'équation différentielle sur la température $T(r)$ pour $a < r < R$. On note T_R la température de surface de la Terre. En déduire alors complètement $T(r)$ en fonction des données.

4 Température d'un câble électrique

Un conducteur électrique de section circulaire de rayon r_1, de conductivité électrique σ et de conductivité thermique k_1 est entouré d'une gaine isolante pour $r_1 < r < r_2$ de conductivité thermique k_2. Ce conducteur est parcouru par un courant d'intensité I. Sa résistance électrique d'une longueur L du câble est $R = \frac{L}{\sigma S}$ avec S la section du conducteur. On se place en régime permanent et on néglige tout effet de bord. La conduction sera considérée uniquement radiale. On suppose que le contact thermique entre le conducteur et la gaine est parfait. En revanche, on admettra qu'entre la gaine isolante et l'air ambiant (de température T_0) s'établissent des échanges thermiques superficiels tels que la densité de flux thermique entre la gaine à la température $T(r_2)$ et l'air s'écrit $j = h(T(r_2) - T_0)$. On notera r la distance d'un point à l'axe du conducteur.

1. Pour une longueur L de câble, exprimer la puissance P dissipée par effet Joule. En déduire $\overrightarrow{j}(r_1) = j(r_1).\overrightarrow{e_r}$.
2. Par un bilan énergétique global sur un système bien choisi, relier $j(r_1)$, $j(r)$, r et r_1. (Il est également possible de déterminer par un bilan local que $j(r) = \text{cte}/r$.)
3. En déduire l'expression de la température $T(r_2)$ dans la gaine.
4. En déduire l'expression de la température $T(r)$ en tout point de la gaine, puis la température à l'interface conducteur-gaine.
5. Un courant d'intensité $I = 32$ A traverse le conducteur. Déterminer la température $T(r_1)$ selon que la section du fil est de $1,5$ mm^2 ou 6 mm^2. Commenter.

Données : $k_1 = 50$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $k2 = 0,05$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $h = 20$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $\sigma = 107$ Ω^{-1}.m^{-1} ; $r_2 - r_1 = 2$ mm ; $T_0 = 25$°C.

5 Barreau d'uranium

La réaction nucléaire se produisant dans un barreau d'uranium dégage une puissance volumique $P_v = 700$ MW.m^{-3}. Le barreau considéré, d'axe Oz, a pour rayon $r = 10$ mm et pour longueur $L = 10$ m. On étudie ce barreau en régime stationnaire établi. On considère les parois latérales calorifugées de sorte que le vecteur densité de flux thermique a pour expression $\overrightarrow{j} = j(z).\overrightarrow{e_z}$ en tout point du barreau. On considère le contact idéal entre le bord du barreau et l'air extérieur à la température $\theta_0 = 200$°C en $z = 0$ et $z = L$. L'uranium a pour conductivité thermique $\lambda = 27$ W.m^{-1}.K^{-1}.

1. En raisonnant sur une tranche du barreau de longueur dz entre z et $z + dz$, déterminer une relation entre $j(z)$ et P_v.
2. Dans le cadre du régime stationnaire étudié, déterminer les constantes A, B et C dans la relation $T(z) = A.z^2 + B.z + C$
3. En déduire la valeur de la température maximale dans le barreau. Commenter.

6 Influence de la convection

On ne considère que des régimes permanents. L'intérieur d'une pièce à la température T_1 est séparée de l'extérieur à la température $T_2 < T_1$ par une paroi vitrée de surface S et d'épaisseur e, orthogonale à l'axe Ox, et dont le verre a une conductivité thermique κ. En plus de la conduction, on doit tenir compte des échanges superficiels entre le verre et l'air extérieur. Une surface S de verre à la température T_S échange avec l'air à la température T_a le flux $\phi_s = h.S.(T_S - T_a)$. On considèrera la température du verre à l'interface intérieure égale à T_1.

1. Exprimer la résistance thermique R_v de la vitre en fonction de κ, S et e.

2. Exprimer la résistance thermique R_s modélisant les phénomènes de convection en fonction de S et h.
3. Exprimer le flux thermique à travers le vitrage.
4. Par temps calme, $h_1 = 5$ W.m^{-2}.K^{-1} alors que par grand vent $h_2 = 100$ W.m^{-2}.K^{-1}. Déterminer les pertes relatives dues au vent.
5. Déterminer puis calculer dans les deux cas la température à la surface externe de la vitre.
6. AN avec $T_1 = 290$ K ; $T_2 = 270$ K ; $e = 3$ mm ; $\kappa = 1,2$ W.m^{-1}.K^{-1}.

7 Isolation

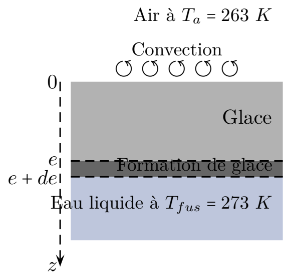
L'intérieur d'une maison à la température T_i, et l'extérieur à la température T_e sont considérés comme deux sources idéales de température. Le mur d'une surface $S = 20$ m^2 qui les sépare est constitué :
- de parpaings d'épaisseur $e_1 = 40$ cm et de conductivité thermique $\lambda_1 = 0,7$ W.m^{-1}.K^{-1},
- d'un isolant d'épaisseur de conductivité thermique $\lambda_2 = 0,05$ W.m^{-1}.K^{-1}

Une petite partie $s = 5$ m^2 du mur est difficile à isoler. Ainsi plutôt que de mettre une épaisseur $e = 20$ cm d'isolant réparti uniformément comme prévu sur le devis, l'artisan pose une épaisseur $e_2 = 27$ cm sur les parties accessibles et n'isole pas le reste du mur. Proposer un argumentaire chiffré permettant au client de porter réclamation.

8 Épaisseur d'une couche de glace (**)

Une couche de glace d'épaisseur $e(t)$ est en formation à la surface d'un lac à l'instant t. On considère l'augmentation de de cette épaisseur pendant la durée dt. Le phénomène est suffisamment lent pour considérer le régime stationnaire du point de vue de la conduction thermique.
On admet que l'échange énergétique avec la couche de glace en formation se fait uniquement avec l'air extérieur, au travers de la couche de glace déjà constituée. Les phénomènes de convection à l'interface air-glace induisent une température à cette interface $T_s \neq T_a$. Ces phénomènes sont traduits par la loi de Newton :

$$|j_{conv}| = h.|T_s - T_a| \quad h = 50\ W.m^{-2}.K^{-1}$$



On note $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}.\overrightarrow{e_z}$ le vecteur densité de flux thermique dans l'épaisseur e de glace.

1. Exprimer $j_{th}(z = 0)$ en fonction de h, T_s et T_a
2. Relier j_{th} à λ_g, e, T_s et T_{fus}, puis en fonction de h, T_a, λ_g, e et T_{fus}
3. Relier j_{th} à de, dt, ρ_g et l_{fus}
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par e. Déterminer l'expression de $e(t)$.
5. Calculer la vitesse de croissance de la glace au début de la formation de la couche de glace..

Données pour la glace : $\lambda_g = 2,1\ W.m^{-1}.K^{-1}$; $l_{fus} = 330\ kJ.kg^{-1}$; $\rho_g = 900\ kg.m^{-3}$

9 Neige sur un toit (**)

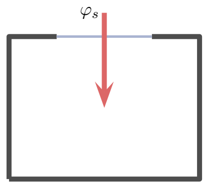
Un jour d'hiver, il fait une température $T_0 = -15$°C à l'extérieur du chalet et on maintient une température T_1 à l'intérieur par chauffage. Ce jour là, la neige tombe avec un débit massique surfacique $D_N = 2,1$ kg.h^{-1}.m^{-2}.

Le chalet est en bois avec des murs et un toit d'épaisseurs e, le toit est incliné de 30° par rapport à l'horizontale et a une surface S. On considère que la neige se dépose et tient sur le toit tant que sa température est inférieure à 0°C. Et lorsque sa température atteint 0°C, elle glisse brusquement du toit.

1. Donner qualitativement l'évolution de l'épaisseur de neige sur le toit.
2. Pour un toit initialement sans neige, on observe que la neige tombe du toit au bout de 2 h. En déduire la température T_1 dans le chalet.

<u>Données</u> :
- ⋆ Conductivité thermique de la neige : $\lambda_n = 0,045$ W.m^{-1}.K^{-1}.
- ⋆ Conductivité thermique du sapin : $\lambda_s = 0,13$ W.m^{-1}.K^{-1}.
- ⋆ Coefficient de conducto-convection (naturelle) d'une interface air/solide : $h = 10$ W.m^{-2}.K^{-1}.
- ⋆ Densité de la neige fraiche peu tassée : $d_n = 0,1$.

10 Vitre et effet de serre



- On considère une vitre comme un corps gris : elle a les caractéristiques du corps noir pour des rayonnement incidents infra-rouge et est totalement transparente pour les rayonnements visibles.
- Les murs sont assimilés à des corps noir

On étudie une pièce avec une ouverture vitrée. Vitres ouvertes, cette pièce a une température $\theta_0 = 25°c$.
On rappelle les lois

- de Stéphan : $\varphi(T) = \sigma.T^4$ avec $\sigma = 5,67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$
- de Wien : $\lambda_M.T = 2900\ \mu m.K$

On note φ_s le flux surfacique du rayonnement solaire incident arrivant sur la vitre.

1. Évaluer la valeur de φ_s.
2. Quelle est la valeur λ_M associée au rayonnement thermique des murs. A quel domaine du spectre cela correspond-il ?
3. Expliquer qualitativement pourquoi la vitre crée un effet de serre dans la pièce.
4. On note φ_p le flux surfacique du rayonnement thermique de la pièce et φ_v le flux surfacique du rayonnement thermique de la vitre.

   Exprimer au niveau de la vitre et de la pièce deux relations correspondant aux bilan énergétiques.

   En déduire les températures de la pièce et de la vitre.

11 Effet de serre avec double vitrage

On considère un mur assimilable à un corps noir. Le flux solaire arrive sur un double vitrage en incidence normale avant d'atteindre le mur. On considère le problème unidimensionnel. Une vitre peut être considérée comme transparente dans le domaine du visible et comme un corps noir dans le domaine infra-rouge. Au niveau de la Terre, la densité surfacique de flux solaire est $\varphi = 350$ W.m^{-2}. On néglige dans ce problème l'effet de serre du à l'atmosphère.

Lorsque le mur reçoit directement le flux solaire (vitres ouvertes), sa température est $\theta_0 = 15°$C. On rappelle la loi de Stephan $\varphi = \sigma.T^4$. On notera φ_m, φ_{v1} et φ_{v2} les flux surfaciques correspondant au rayonnement respectivement du mur, de la vitre coté mur et de la vitre extérieure. Le mur ne rayonne que $\eta = 70\%$ du rayonnement total vers les vitres, le reste étant rayonné vers les autres pièces de la maison. Les vitres rayonnent des deux cotés.

1. Écrire trois relations liant les densités surfaciques de flux rayonnées et le flux surfacique solaire incident en effectuant un bilan énergétique pour le mur et chacune des vitres
2. En déduire la température du mur.

12 Résolution numérique d'un transfert thermique

On s'intéresse aux transferts thermiques à travers un mur compris entre les plans $x = 0$ (paroi intérieure) et $x = L$ (paroi extérieure), et de grande dimension selon y et z. On considère les températures constantes et uniformes aux niveau des parois : $T(t, x = 0) = T_{\text{int}} = 20°$C et $T(t, x = L) = T_{\text{ext}} = 5°$C. Initialement, sa température vaut $T(t = 0, x) = T_{\text{ext}}$. La température suit l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. On discrétise l'intervalle $[0, L]$ en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial dx. On note le pas de temps dt. La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée T_i^n.

1. Exprimer la diffusivité thermique k en fonction de la conductivité thermique λ, la masse volumique ρ et la capacité thermique massique c du matériau.
2. Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du i-ème point.
3. À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer une expression de $\frac{\partial T}{\partial t}$ en fonction de $T(t, x)$ et $T(t + dt, x)$ à l'ordre le plus bas non nul en dt.
4. À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer une expression de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ en fonction de $T(t, x)$, $T(t, x - dx)$ et $T(t, x + dx)$ à l'ordre le plus bas non nul en dx.
5. En déduire l'expression de T_i^{n+1} en fonction de dt, dx, k, T_{i-1}^n, T_i^n et T_{i+1}^n.

Le code suivant permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

6. Donner `[Instruction 1]` permettant de définir la diffusivité thermique k.
7. L'équation trouvée question 5 est-elle valable pour toute valeur de $i \in [\![0, N_X]\!]$?
8. Définir les incréments de temps et d'espace en précisant `[Instruction 2.1]` et `[Instruction 2.2]`. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0, t_{\max}]$.
9. À partir des conditions aux limites et initiales, déterminer `[Instruction 3.1]`, `[Instruction 3.2]`, `[Instruction 3.3]` et `[Instruction 3.4]`.
10. À partir de la question 5, compléter `[Instruction 4.1]`, `[Instruction 4.2]` et `[Instructions 4.3]`.

<u>annexe</u> : L'instruction `np.zeros((a,b))` renvoie un tableau de taille `(a,b)` dont chaque élément est un 0 :

```
# exemple d'utilisation de np.zeros
In[1]: np.zeros((3,5))
Out[1]:
array([[0., 0., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 0., 0.]])
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# donnees du pb
Lambda = 0.037
cp = 1500
rho = 1.325
L = 1           # epaisseur isolant
t_max = 20000   # temps de fin d'integration en secondes
N_t = 100       # nombres d'intervalles ds le tps
N_x = 5         # nombres d'intervalles ds l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]  # diffusivite thermique

# discretisation de l'espace et du tps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t + 1, N_x + 1))

# initialisation de la temperature
# conditions initiales
Temp[0,0] = [Instruction 3.1]

for i in range (1,N_x + 1):
    [Instruction 3.2]

# conditions aux limites
for n in range (1,N_t + 1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]

# calcul des temperatures aux differents instants
for n in [Instruction 4.1]):
    for i in range [Instruction 4.2]:      # ni le 1er ni le dernier point
        [Instructions 4.3]
```