TDM2 : Dynamique en référentiel non galiléen

Savoirs

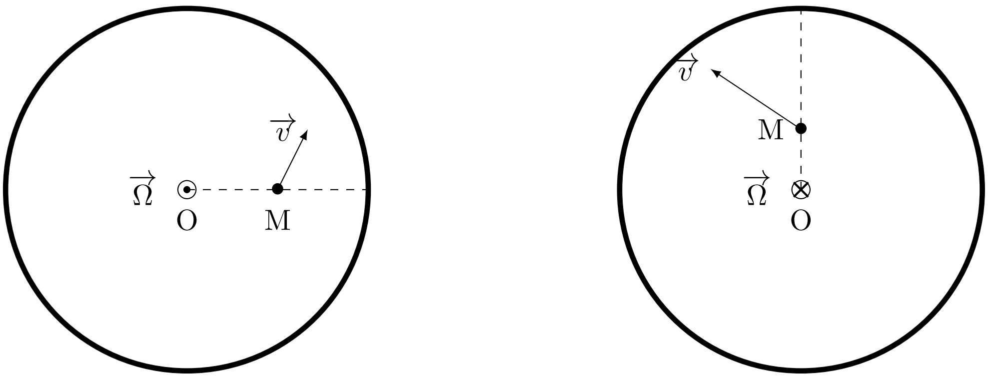
Dans les deux cas suivants seulement : référentiels en translation, référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe, connaître :
• Force d'inertie d'entrainement, force d'inertie de Coriolis.
• Théorèmes fondamentaux de dynamique en référentiel non galiléen : principe fondamental de la dynamique, théorème du moment cinétique, théorème de l'énergie/puissance cinétique/mécanique.
• Champ de pesanteur : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur.

Savoir-faire

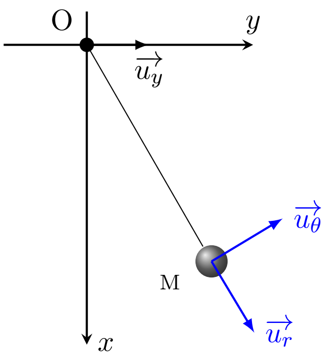
• Appliquer les théorèmes de dynamique du point matériel en référentiel non galiléen à des systèmes à l'équilibre (*1, 2*) ou en mouvement (*exos 3, 4, 5, 6, 8*).
• Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel. *Exo 7.*

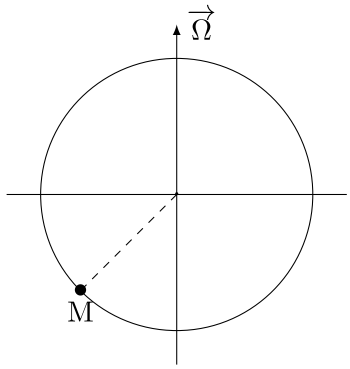
Interro de cours

1. Considérons un manège en rotation à vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$ vu de dessus sur le schéma. Soit un point matériel M de masse m de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ lié au manège. Sans calcul, préciser sur le schéma l'orientation de la force d'inertie d'entrainement et de la force de Coriolis subies par M.



2. Un train se déplace selon $\overrightarrow{u_y}$ et freine. Un pendule est attaché au point O du plafond d'un wagon et se trouve dans l'état d'équilibre (dans le référentiel lié au wagon) décrit par le schéma ci-dessous. Sans calcul, préciser sur le schéma l'orientation de la force d'inertie d'entrainement et de la force de Coriolis subies par M.



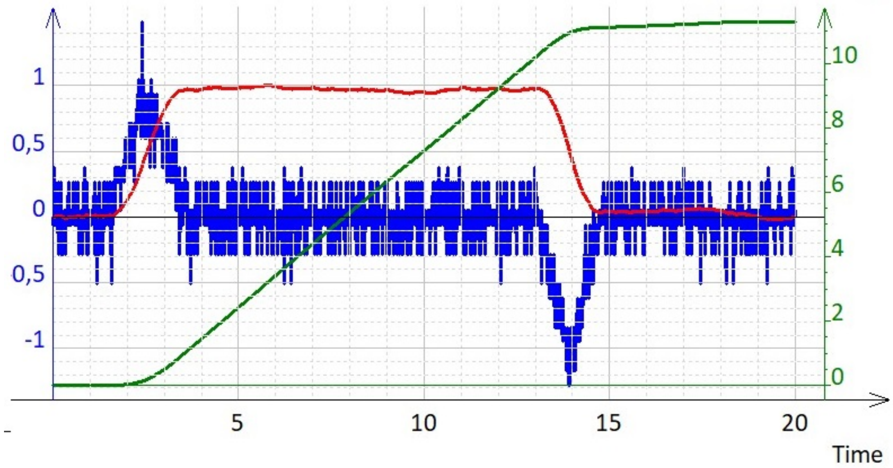


3. On note $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique. Soit un système M à la surface terrestre. Préciser sur le schéma l'orientation des deux forces qui contribuent à son poids dans le référentiel terrestre.

4. Quand M est en chute libre sous l'effet de son poids dans le référentiel terrestre, quel est le sens de la force d'inertie de Coriolis ? Même question s'il se déplace vers le Nord.

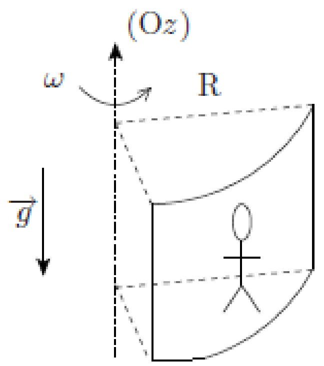
1 Ascenseur

Lors d'un trajet en montée avec l'ascenseur du lycée, un accéléromètre a mesuré l'accélération verticale $a(t)$ de l'ascenseur au cours du temps (abscisse de gauche). Ont ensuite été calculées vitesse verticale $v(t)$ et altitude $z(t)$. Le graphe non légendé suivant présente ces trois courbes. Associer chaque grandeur physique à sa courbe. Si on se pèse sur une balance à ressort dans l'ascenseur, que vaut la masse apparente m_{app} mesurée par la balance au cours du trajet ?



2 À la fête foraine

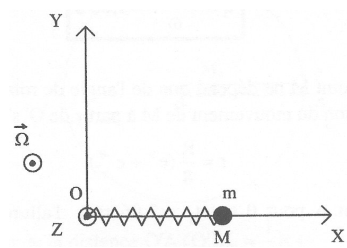
Un manège est constitué d'un grand cylindre creux d'axe vertical (Oz) et de rayon intérieur R. Des personnes prennent place dans le cylindre, dos plaqué contre la face interne du cylindre et l'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire ω. Lorsque la vitesse de rotation est suffisante, le plancher est retiré et les personnes restent « collées » à la paroi.



On appelle μ le coefficient de frottement sur la paroi du cylindre. la personne est alors immobile tant que l'inégalité $f_T < \mu f_N$ est respectée, où $\overrightarrow{f_T}$ et $\overrightarrow{f_N}$ représentent respectivement les composantes tangentielle et normale de la force de réaction de la paroi. Déterminer en fonction de μ et des données la vitesse minimale ω_{min} de rotation du manège pour que le plancher puisse être retiré.

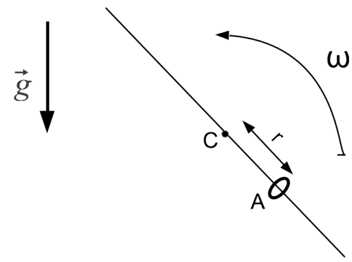
3 Ressort en rotation

Un anneau de masse m, peut coulisser sans frottement le long d'une tige rigide Ox. On accroche un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 à l'anneau, son autre extrémité étant reliée à O fixe. Le ressort et la tige sont animés dans le plan horizontal d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse de rotation ω autour de Oz. On note $x = OM$ la longueur du ressort à l'instant t. À $t = 0$ les conditions initiales sont $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$.



1. Quelle est l'équation différentielle en x donnant le mouvement de m sur l'axe Ox ?
2. Analyser qualitativement les trois types de solution en précisant simplement la nature du mouvement de la masse m.
3. À quelles conditions la masse reste-t-elle immobile ?
4. Quelle est la valeur du module de la réaction $\overrightarrow{R}$ qu'exerce la barre sur la masse en fonction de m, g, ω et $\dot{x}$?

4 Tige en rotation

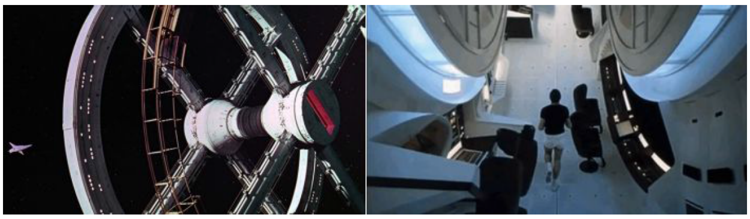


Une tige de longueur $2l$ tourne dans un plan vertical autour de son centre d'inertie C, à une vitesse angulaire constante ω. Un anneau glisse sans frottements le long du bâton. On repère la position de l'anneau par le point A sur le bâton et on note $r(t)$ la distance algébrique entre C et A. Attention, comme l'anneau peut passer à travers C, la distance r peut changer de signe, et donc utiliser un repère tournant cartésien et non pas la base cylindrique. À $t = 0$, $r(0) = r_0$ et la vitesse de l'anneau est v_0. On considèrera que la tige est horizontale en $t = 0$.

1. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur l'anneau et les représenter sur un schéma.
2. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$ et la résoudre.
3. Quelles sont les forces exercées par l'anneau sur la tige ?
4. Donner les conditions sur r_0 et v_0 pour que le mouvement soit oscillatoire.

5 Gravité artificielle dans l'espace

Dans le film *2001, l'Odyssée de l'espace* de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial (photo ci-dessous à gauche) constitué d'un tore tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante dans un référentiel galiléen. Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore comme sur Terre (photo ci-dessous à droite), ils sont soumis à une gravité artificielle et l'on voit même, dans une des scènes du film, l'un d'entre eux nommé Poole faire un jogging.



1. Comment se déplacent les astronautes par rapport à l'axe du tore pour pouvoir bénéficier de la gravité induite par la rotation artificielle autour de l'axe ?
2. Évaluer le rayon du vaisseau et sa vitesse angulaire de rotation pour que les astronautes subissent une gravité artificielle de valeur équivalente à celle existant sur Terre.
3. Expliquer alors pourquoi il peut être très fatigant de courir dans la station spatiale (on choisira des valeurs numériques pour illustrer le raisonnement). Le sens choisi pour faire le footing est-il important ?

6 Déviation vers l'est

On considère la chute d'un objet sans vitesse initiale au voisinage de la surface terrestre à une latitude λ de 45 ° Nord. Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique, supposé galiléen, à $\omega = 7{,}27.10^{-5}$ s^{-1}. On utilisera le repère lié au référentiel terrestre : x vers l'Est, y le Nord, et z vers le haut. Lors de la chute, l'objet de masse m est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ et à la force d'inertie de Coriolis, de moindre importance. Le but de l'exercice est d'utiliser une « méthode perturbative » pour déterminer le léger effet de la force d'inertie de Coriolis sur la chute libre sans frottement.

1. L'auteur de l'énoncé a-t-il oublié la force d'inertie d'entrainement dans le bilan des forces ?
2. Sans calculer explicitement son expression, déterminer le sens de la force d'inertie de Coriolis lors d'une chute verticale.
3. En négligeant dans un premier temps l'effet de la force d'inertie de Coriolis, démontrer que l'altitude de l'objet est $z(t) = -gt^2/2 + h$ où h est la hauteur initiale. En déduire la durée de chute $\tau = \sqrt{2h/g}$.
4. En faisant l'approximation que la vitesse est approchée par $\overrightarrow{v} = \dot{z}.\overrightarrow{e_z}$, exprimer la force d'inertie de Coriolis en fonction de m, $\dot{z}$, ω, λ.
5. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, en déduire alors $x(t)$.
6. Combien vaut le déplacement vers l'est pour une chute de 160 m de haut ?

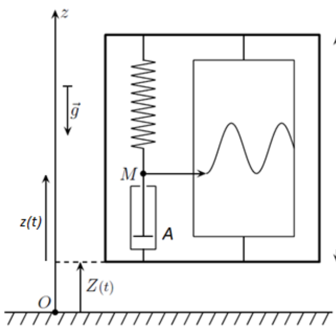
7 Pesanteur

On s'intéresse au champ de pesanteur $\overrightarrow{g}(P)$ en un point de la surface de la Terre. La Terre (assimilée à une sphère de rayon R et de masse M) effectue un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles (Oz), à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi/T$, dans le référentiel géocentrique R_g. On néglige l'influence de tout astre autre que la Terre sur le champ de pesanteur subit par le point P.

1. Justifier quels sont les deux termes qui apparaissent dans l'expression de $\overrightarrow{g}(P)$, puis détailler leur expression. Il sera nécessaire d'introduire des notations supplémentaires que l'on définira sur un schéma de coupe de la Terre. Faire apparaître le vecteur associé à chacun de ces deux termes et $\overrightarrow{g}(P)$ sur votre schéma.
2. Calculer la norme g du champ de pesanteur pour un point situé sur l'équateur. On donne : $G = 6,67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} (constante de gravitation) ; $R = 6378$ km (rayon équatorial) ; $M = 5,99.10^{24}$ kg ; $T = 23$ h 56 min.
3. Imaginons maintenant que l'on pose le pied sur l'astéroïde Sisyphe, lui aussi sphérique mais beaucoup plus petit que la Terre et en rotation plus rapide : $R' = 1,2$ km (rayon équatorial) ; $M' = 1,8.10^{12}$ kg ; $T' = 2$ h 24 min. Que peut-on dire du poids à l'équateur ?

8 Sismographe

Un sismographe est constitué d'une boîte rigide dans laquelle un stylet (en M) enregistre le mouvement qu'il a par rapport à la boîte. Le stylet est relié à un ressort et un amortisseur (en A). La boîte est mise en mouvement vertical par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen lié au sol. La cote de la boîte est notée $Z(t)$. L'amortisseur A exerce sur M une force de frottement fluide $\overrightarrow{f_d} = -h\overrightarrow{v}$ où h est une constante et $\overrightarrow{v}$ la vitesse de M par rapport au boîtier. Le ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, exerce quant à lui une force de rappel sur le stylet.
On note $z(t)$ la position du point M par rapport au fond de la boîte et $Z(t) + z(t)$, la position de M par rapport au sol. On étudie la position $z(t)$ de M lorsque le boîtier reçoit une onde sismique, supposée verticale et produisant un mouvement rectiligne du boîtier repéré par la position $Z(t)$.



1. Montrer que l'équation différentielle liant les variables $z(t)$ et $Z(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m}z(t) = -\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}(H - l_0) - g$$

2. Après avoir déterminé la position d'équilibre z_{eq} lorsque le boitier est au repos, déterminer l'équation différentielle sur $z'(t) = z(t) - z_{eq}$.

On considère une onde sismique sinusoïdale, de pulsation ω, qui produit un mouvement du boîtier du type $Z(t) = Z_m \cos \omega t$. On s'intéresse au régime forcé tel que $z'(t) = z(t) - z_{eq} = z_m \cos(\omega t + \varphi)$.

3. En utilisant la notation complexe, établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{z'}}{\underline{Z}}$
4. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $\sqrt{2}/\tau = h/m$. On suppose que $\omega_0\tau = 1$. Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1 + j\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}$$

5. Préciser la nature du filtre obtenu. Que se passe-t-il si $\omega_0 \ll \omega$?