TDMF0 : Statique des fluides

Savoirs

• Rappels de PCSI : force de pression, poussée d'Archimède, statique des fluides en référentiel galiléen.
• Forces volumiques de pression et d'inertie d'entrainement : cas d'une translation ou d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe. Statique des fluides en référentiel non galiléen.

Savoir-faire

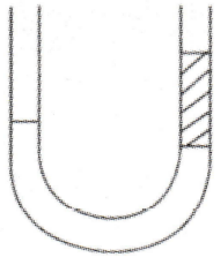
• Révision de statique des fluides de PCSI. *Paries 1, 2 et 3.*
• Établir l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique. Appliquer le théorème de la statique des fluides en référentiel non galiléen. *Exos 4, 5.*

Interro de cours

1. Donner l'expression de la densité volumique de forces de pression p en fonction de la pression p.
2. Donner l'expression de la poussée d'Archimède subie par un corps de volume V, de masse volumique μ au repos dans un fluide de masse volumique μ_f dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.
3. Donner l'expression de la densité volumique de forces de pesanteur d'un fluide de masse volumique μ.
4. Donner l'expression de la densité volumique de forces d'inertie d'entrainement.
5. Donner la relation de la statique des fluides. Simplifier dans le cas $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$.

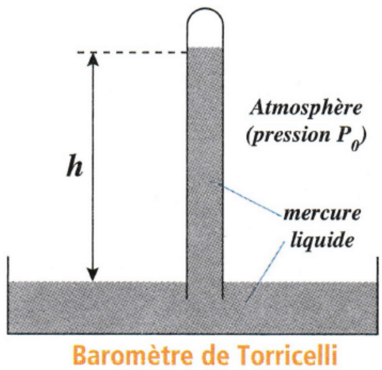
1 Rappel PCSI : statique des fluides en référentiel galiléen

1.1 Mesure de densité



On dispose d'un tube en U de section $S = 1$ cm^2. On y verse un volume d'eau $V_e = 20$ mL et un volume d'huile $V_h = 10$ mL de densité inconnue à déterminer, cf figure. On remarque que la différence d'altitude entre l'interface eau/air et l'interface eau/huile est de $9,1$ cm. En déduire la mesure de la densité de l'huile.

1.2 Modèle d'atmosphère isotherme



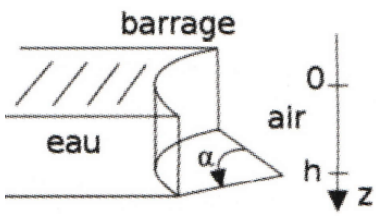
Baromètre de Torricelli

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g/mol, et de température $T = 10\,^\circ$C uniforme et constante. On suppose le champ de pesanteur uniforme. La pression au niveau de la mer est notée p_0. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,314$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

1. Exprimer la masse volumique de l'air μ en fonction de M, T, la constante des gaz parfait R et la pression p.
2. Monter alors que la pression en fonction de l'altitude z vaut $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$, où H est une constante qu'on exprimera en fonction des données.
3. Quelle est l'unité de H ? Calculer sa valeur. Commenter.
4. Que vaut la pression p_{LP} au niveau de l'aéroport de La Paz en Bolivie situé à 4061 m d'altitude pour une température de $10\,^\circ$C ?
5. À l'époque de Blaise Pascal, on pouvait mesurer une pression à l'aide du tube de Toricelli, cf figure. Le récipient de base est en contact avec l'atmosphère, le haut du tube central est du vide, ce qui fait monter le liquide dans le tube. Déterminer la hauteur de la colonne de mercure si on utilise cet instrument à l'aéroport de La Paz. La masse volumique du mercure liquide est $\mu_{\text{Hg}} = 1,35.10^4$ kg.m^{-3}.
6. On revient à l'expression $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$ dans l'atmosphère. En déduire l'expression de la masse volumique $\mu(z)$. En négligeant la courbure de la Terre, en déduire la masse m_S d'air au dessus d'une surface terrestre de section S.
7. Estimer alors la masse de l'atmosphère.

2 Rappel PCSI : résultantes de forces de pression

2.1 Forces de pression sur un barrage courbe



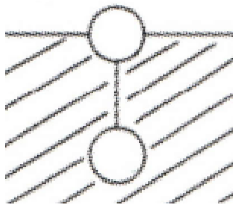
Un barrage courbe est schématisé par une portion d'angle α de cylindre vertical sans épaisseur d'axe z et de rayon R. Le lac de retenue est de hauteur h dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_z}$. Déterminer la résultante des forces de pression sur le barrage.

3 Rappel PCSI : poussée d'Archimède

3.1 Rafraichissement

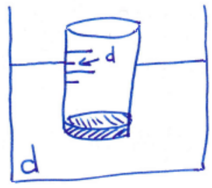
Un glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. Le verre va-t-il déborder lors de la fonte du glaçon ?

3.2 Tension



Deux boules de même rayon sont reliées par un fil. Elles sont des masses différentes : m et $3m$. Lorsque le système est à l'équilibre dans l'eau, le centre de la boule supérieure est au niveau de la surface libre de l'eau. Exprimer la tension du fil en fonction de m.

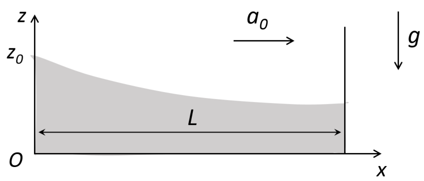
3.3 Densimètre



Un densimètre est un cylindre lesté gradué qui permet des mesures de densité d'un liquide. La graduation en face du niveau du liquide indique la densité de celui-ci. Données du cylindre : hauteur $h = 28,0$ cm, section $s = 2,00$ cm^2, masse totale $m = 50,0$ g. Où placer la graduation de densité 1,00 par rapport à l'extrémité supérieure du cylindre ?

4 Camion-citerne

Soit un récipient parallélépipédique rectangle de longueur L contenant initialement une hauteur h d'eau incompressible, de masse volumique μ à l'équilibre. On impose au récipient une accélération uniforme $\overrightarrow{a_0}$ (par exemple en se plaçant dans un véhicule), horizontale et parallèle à son côté de longueur L. On constate expérimentalement qu'après quelques oscillations, l'eau s'immobilise par rapport au récipient : elle est alors en équilibre dans le référentiel (non galiléen) lié au récipient. On note P_{atm} la pression atmosphérique.



1. En écrivant la relation de la statique des fluides dans le référentiel lié au récipient, établir trois équations aux dérivées partielles vérifiées par le champ de pression.
2. En déduire l'expression du champ de pression $P(x, y, z)$. On pourra faire intervenir l'altitude z_0 inconnue du point de la surface libre situé en $x = 0$. *[Sous-entendu : $P(x = 0, y, z = z_0) = P_{\text{atm}}$.]*
3. Déterminer l'équation de la surface libre (interface eau-air).
4. Déterminer z_0.
5. A l'aide d'un fil sans masse de longueur d, on attache une petite balle en polystyrène de volume V_1 et de masse volumique $\mu_1 < \mu$ au fond du récipient en un point A. Le fil est suffisamment court pour que la balle reste complètement immergée. Déterminer l'angle β que fait le fil avec l'axe Oz ainsi que la norme $\|\overrightarrow{T}\|$ de sa tension à l'équilibre.

5 Récipient en rotation

Soit un récipient cylindrique de rayon R contenant initialement une hauteur h d'eau à l'équilibre. Grâce à un moteur, ce récipient est mis en rotation à vitesse angulaire constante autour de son axe de révolution. On constate expérimentalement que l'eau est progressivement entraînée en rotation avec le récipient jusqu'à s'immobiliser par rapport au récipient. L'eau est donc en équilibre dans le référentiel tournant (non galiléen) lié au récipient. On travaille en coordonnées cylindriques (O, r, θ, z) dont l'axe $(O, \overrightarrow{u_z})$ constitue l'axe de rotation, le point O étant au fond du récipient.

1. Exprimer la force d'inertie d'entrainement. La mettre sous forme d'un gradient.
2. Effectuer un bilan des forces dans le référentiel tournant pour obtenir une relation dans le fluide reliant notamment p, z et r.
3. En déduire que la surface libre est de la forme $z(r) = \beta r^2 + \alpha$ où β est à exprimer et α est pour l'instant inconnue.
4. En découpant le volume de fluide en couronnes cylindriques d'épaisseur dr, on montre que $V = \int_0^R z(r).2\pi r.dr$. Par conservation du volume lors de la mise en rotation, en déduire la constante α.
5. Déterminer les hauteurs minimale et maximale atteintes par le fluide dans le récipient. Quelle est la condition sur la vitesse angulaire ω pour que le fond du récipient ne se découvre pas ?