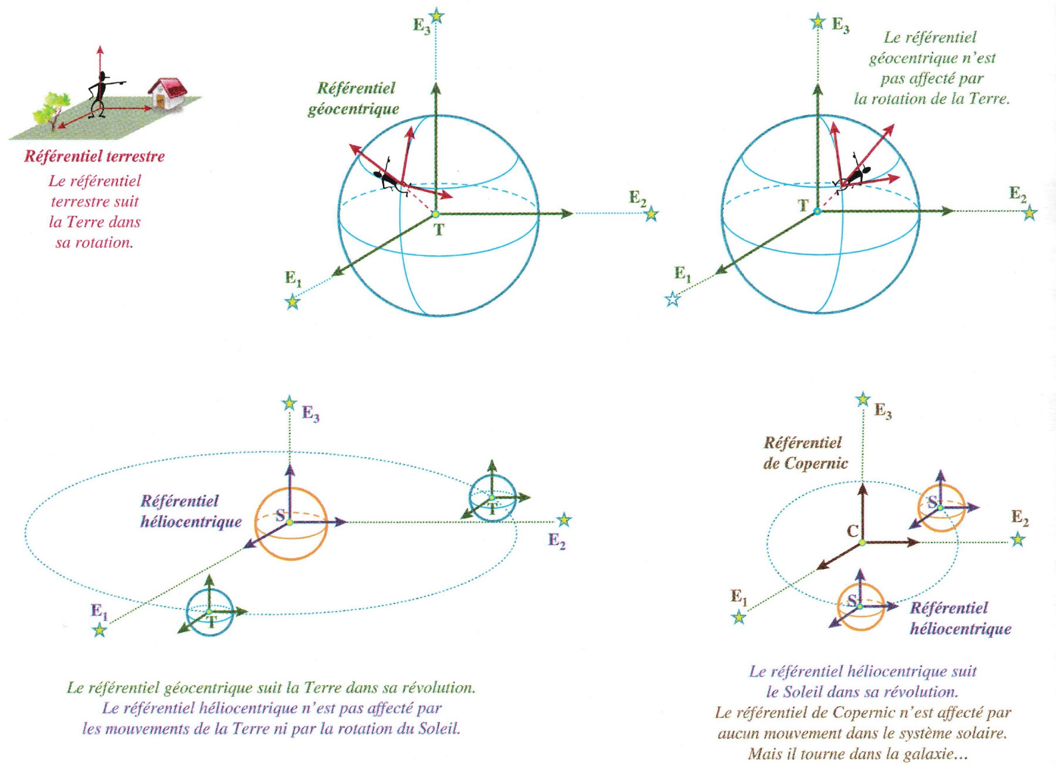
M1 : Changement de référentiel

Référentiel	Définition	Propriétés
Terrestre	Lié à la Terre, il peut se représenter en un point quelconque de la planète.	Ses axes tournent en même temps que la Terre. La Terre, le laboratoire, le sol… sont fixes dans ce référentiel.
Géocentrique (ou de Kepler)	Lié au centre de la Terre et à 3 étoiles « fixes » (c'est-à-dire suffisamment lointaines pour nous paraître fixes sur la durée du problème).	L'objet physique définissant le référentiel n'est pas la Terre qui tourne dans ce référentiel (seul son centre est fixe), mais la structure formée du centre de la Terre et des 3 étoiles.
Héliocentrique	Lié au centre du Soleil et à 3 étoiles « fixes » *(voir ci-dessus).*	Le Soleil tourne dans le référentiel, seul son centre est fixe. Dans ce référentiel, la Terre tourne sur elle-même et son centre se déplace sur l'orbite terrestre.
De Copernic	Lié au centre d'inertie C du système solaire et à trois étoiles « fixes ».	Dans ce référentiel, le Soleil tourne sur lui-même et orbite autour de C, de même que toutes les planètes.



***N. B. :** Le Soleil représentant 99,9 % de la masse du système solaire, C est proche de S et se situe dans le Soleil, mais sur le schéma on l'a représenté à l'extérieur pour une meilleure compréhension.*

FIGURE 1 – Les référentiels usuels à connaître.

1 Notion de référentiel

1.1 Définition

Caractère relatif du mouvement : Pour un spectateur de Formule 1 : les voitures sont mobiles, pas la piste ni les gradins. Pour un pilote, le cockpit de sa voiture est immobile, la piste et les gradins se déplacent.
Caractère relatif du temps : D'après la relativité restreinte, l'écoulement du temps est différent pour des observateurs à différentes vitesse.

$\Rightarrow$ Nécessité de références de temps ET d'espace pour décrire les mouvements.

def : un **référentiel** est l'association :
- d'une horloge $\rightarrow$ mesure de temps,
- **ET** d'un repère $\rightarrow$ mesure de position.

def : Un repère est constitué d'une origine (souvent notée O) et d'une base orthogonale.

Approximation non relativiste : dans la limite où les vitesses sont petites devant la célérité c de la lumière dans le vide, l'écoulement du temps devient indépendant de l'observateur. Ainsi, **en mécanique classique, il suffit de préciser seulement le repère pour caractériser un référentiel**.

rq : Le choix d'un référentiel est TOUJOURS la première étape d'un problème de mécanique.

Référentiels courants à connaître, cf figure 1 : terrestre, géocentrique, héliocentrique, de Copernic.

1.2 Intérêt de définir plusieurs référentiels

On choisit un référentiel en fonction de la facilité à décrire la trajectoire du point étudié dans ce référentiel.
ex1 : La trajectoire de la valve d'une roue de vélo est une cycloïde dans le référentiel terrestre mais un cercle dans le référentiel lié au vélo.

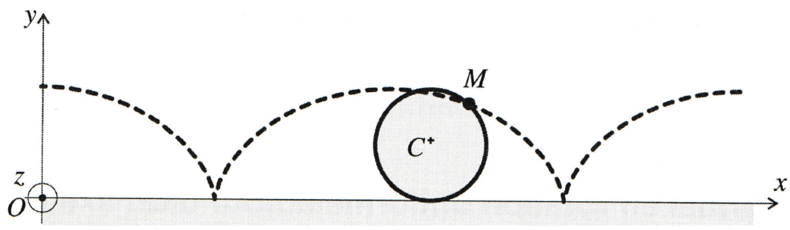


FIGURE 2 – Trajectoire de la valve d'une roue de vélo dans le référentiel terrestre.

ex2 : La trajectoire d'un pendule sur une durée courte est un arc de cercle dans le référentiel terrestre mais est complexe dans le référentiel géocentrique !

Cependant, les lois fondamentales de la mécanique (lois de Newton, théorème du moment cinétique, etc) ne sont valables que dans certains référentiels, les référentiels dits « **galiléens** » . Ainsi, on doit être capable d'étudier un système dans un référentiel et d'écrire ses grandeurs cinématiques dans un autre référentiel.

Notations : on notera en général les deux référentiels d'étude :
⋆ $\mathcal{R}$ d'origine O et de base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$,
⋆ $\mathcal{R}'$ d'origine O' et de base $(\overrightarrow{u'_x}, \overrightarrow{u'_y}, \overrightarrow{u'_z})$.

1.3 Référentiels en translation

Deux référentiels sont dits en translation si les axes liés au référentiel $\mathcal{R}'$ ont des directions fixes vues du référentiel $\mathcal{R}$.

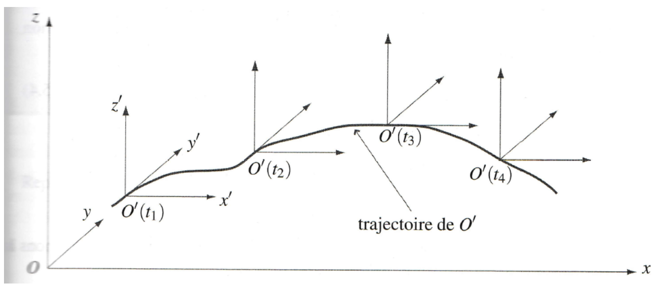


FIGURE 3 – Exemple de translation quelconque de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.

cas particuliers :
⋆ **translation rectiligne** si O' a un mouvement rectiligne dans $\mathcal{R}$. Alors les points fixes de $\mathcal{R}'$ ont des trajectoires rectilignes parallèles dans $\mathcal{R}$.
⋆ **translation circulaire** si O' a un mouvement circulaire dans $\mathcal{R}$. Alors les points fixes de $\mathcal{R}'$ ont des trajectoires circulaires dans $\mathcal{R}$ de même rayon mais de centres différents (au contraire d'une rotation autour d'un axe).
rq : Le référentiel géocentrique est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique. De même entre les référentiels héliocentrique et de Copernic.

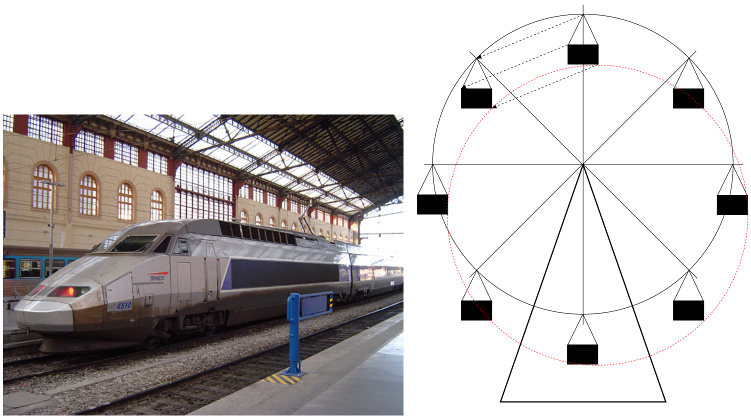


FIGURE 4 – Un référentiel lié au train est en translation rectiligne (non uniforme) par rapport au quai. Une nacelle d'une grande roue est en translation circulaire par rapport au sol, remarquer que la trajectoire de chaque point est un cercle de même rayon mais centre différent.

1.4 Référentiels en rotation autour d'un axe fixe

Deux référentiels sont dits en **rotation par rapport à un axe** fixe Δ si tous les points fixes de $\mathcal{R}'$ ont un mouvement circulaire dans $\mathcal{R}$ autour de Δ (c'est ce dernier aspect qui distingue une rotation d'une translation circulaire).

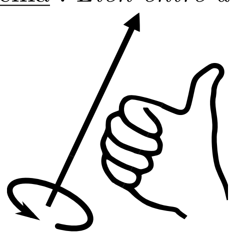
choix de repère : On choisira souvent les repères tels que :
⋆ les origines O et O' sont sur l'axe Δ de rotation,
⋆ les axes (Oz) et (Oz') sont confondus et dirigés suivant Δ.
⋆ Dans le cas où on note $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u'_x})$, alors la base $(\overrightarrow{u'_x}, \overrightarrow{u'_y}, \overrightarrow{u'_z})$ sera assimilable à la base cylindrique de $\mathcal{R}$ $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.

def : Considérons un référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation dans $\mathcal{R}$ à pulsation $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe $\overrightarrow{u_z}$. Son **vecteur rotation** $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega.\overrightarrow{u_z} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u_z}}$$

interprétation : La direction du vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$ donne le sens de rotation par la *règle de l'enroulement de la main droite.*

schéma : *Lien entre direction de $\overrightarrow{\Omega}$ et signe de $\dot{\theta}$. Pouce dirigé selon $\overrightarrow{\Omega}$ et les doigts pointent la direction de rotation.*



exo : *Déterminer les vecteurs rotation : de l'aiguille des heures d'une montre, du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique, et du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique.*

prop : Soit un point **fixe** M de $\mathcal{R}'$ en rotation à distance r autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}$, à vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M) & = r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} \qquad = \mathrm{HM} \cdot \omega \cdot \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) & = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

rappels important : *Vitesse et accélération en rotation autour d'un axe fixe.*

2 Loi de composition des vitesses

2.1 Composition des positions

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}_{\text{vecteur position dans } \mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{O'M}}}_{\text{vecteur position dans } \mathcal{R}'}} \quad \text{(Relation de Chasles)}$$

2.2 Cas de référentiels en translation rectiligne uniforme

prop : **Transformation de Galilée**. Soit $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme à $\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{u_x}$ par rapport à $\mathcal{R}$ avec $V \ll c$.

$$\left\{\begin{array}{ll} x' & = x - Vt \\ y' & = y \\ z' & = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = x' + Vt \\ y & = y' \\ z & = z' \end{array}\right.$$

culture générale non exigible : pour des vitesses non négligeables devant c, il faut utiliser la transformation de Lorentz hors programme :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' & = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' & = y \\ z' & = z \\ t' & = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right.$$

Ex : Trottoir roulant rapide

Capacité exigible [1].

> *Le trottoir roulant rapide (abrégé en TRR) est un tapis roulant expérimental de 180 m installé en 2002 à la station Montparnasse-Bienvenüe du métro de Paris, il a atteint pendant une période la vitesse de 3 m/s contre 0,8 m/s pour les tapis roulants adjacents. $\mathcal{R}$ est le référentiel lié au sol fixe, d'origine à l'entrée du tapis. $\mathcal{R}'$ est le référentiel lié au tapis mobile, d'origine à l'entrée du tapis à $t = 0$. Alice et Bob montent à $t = 0$ sur ce tapis, Alice marche à 1 m/s tendis que Bob se laisse porter. Où se situent-ils à $t = 30$ s ? Quel est la durée des trajets pour atteindre la fin du tapis ? Quelles sont les vitesse dans $\mathcal{R}$?* (Réponses : 120 m et 90 m, 60 s et 45 s, 4 m/s et 3 m/s)

2.3 Notion de point coïncident

> schéma : *Une personne $M(t)$ se déplace sur un manège en rotation. Deux instants t_1 et t_2, $\mathcal{R}$ fixe et $\mathcal{R}'$ en rotation. Points coïncidents $P_{t_1}(M,t)$ et $P_{t_2}(M,t)$.*

def : Le **point coïncident** de M à l'instant t est le point P_t tel que :
- ⋆ P est confondu au point M à l'instant t,
- ⋆ P est immobile dans $\mathcal{R}'$: $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(P_t) = \overrightarrow{0}$.

def : On nomme **vitesse d'entrainement** la vitesse du point coïncident dans $\mathcal{R}$: $\boxed{\overrightarrow{v_e}(t) = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(P_t)}$ (alors que $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(P_t) = \overrightarrow{0}$).

def : On nomme **accélération d'entrainement** l'accélération du point coïncident dans $\mathcal{R}$: $\boxed{\overrightarrow{a_e}(t) = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(P_t)}$ (alors que $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(P_t) = \overrightarrow{0}$).

1. CE : Appliquer la transformation de Galilée dans le cas d'une translation rectiligne uniforme. Relier ces lois à la relation de Chasles et au caractère supposé absolu du temps.

Composition des vitesses : Dans le cas général, la **loi de composition des vitesses** s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M)}_{\overrightarrow{v_a}} = \underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{v_r}} + \underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(P)}_{\overrightarrow{v_e}}}$$

⋆ **vitesse absolue** $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M)$,
⋆ **vitesse d'entraînement** $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(P)$,
⋆ **vitesse relative** $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)$.

2.4 Cas de référentiels en translation

schéma : *$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation à $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(O')$. Points fixes de $\mathcal{R}'$.*

prop : Pour une translation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ à vitesse $\overrightarrow{V}$, tous les points fixes de $\mathcal{R}'$ ont la même vitesse dans $\mathcal{R}$. En particulier : $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(O') = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(P(t)) = \overrightarrow{V} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Composition des vitesses : Pour une **translation** de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ à vitesse $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, la **loi de composition des vitesses** s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M)}_{\overrightarrow{v_a}} = \underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{v_r}} + \underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\overrightarrow{v_e}}}$$

Ex 1 : Mesure de vitesse de la pluie

Dans une voiture à l'arrêt, un passager constate que la pluie tombe verticalement. En roulant à 50 km/h, il observe que la pluie tombe en formant un angle de $40°$ par rapport à la verticale. En utilisant la loi de composition des vitesses, calculer la norme de la vitesse de la pluie par rapport au sol, et celle par rapport à la voiture mobile. (Réponses : 60 km/h et 78 km/h)

Ex 2 : Incompatibilité avec la relativité restreinte (exo peu prioritaire)

Considérons un train en translation rectiligne uniforme à vitesse v par rapport au sol. Un wagon présente deux miroirs horizontaux séparés de L' entre lesquels un photon peut se réfléchir. La célérité du photon dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train est c. La durée pour aller d'un miroir à l'autre dans $\mathcal{R}'$ est donc $\Delta t' = L'/c$.

1. *Point de vue de mécanique classique. Appliquer la composition des vitesses au photon. Remarquer une incompatibilité avec un postulat fondamental de la physique.* (Réponse : $v' = \sqrt{c^2 + v^2} > c$!!)
2. *Point de vue de mécanique relativiste. On suppose cette fois que la célérité du photon est indépendante du référentiel. Exprimer alors la distance L parcourue dans $\mathcal{R}$ pour aller d'un miroir à l'autre. En déduire la durée Δt de parcours dans $\mathcal{R}$ en fonction de $\Delta t'$, v et c.* (Réponses : $L^2 = (L')^2 + v^2\Delta t^2$, $\Delta t = \Delta t'/\sqrt{1 - v^2/c^2} > \Delta t'$)

2.5 Cas de référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe

prop : D'après la section 1.4, les points coïncidents d'un référentiel en rotation uniforme ont des trajectoires circulaires uniformes. Donc $\boxed{\overrightarrow{v_e} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \mathrm{HM}.\omega.\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}}$.

Composition des vitesses : Pour une **rotation uniforme** de $\mathcal{R}'$ autour d'un axe fixe $\mathcal{R}$ à ω, la **loi de composition des vitesses** s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M)}_{\overrightarrow{v_a}} = \underbrace{\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{v_r}} + \underbrace{\mathrm{HM}.\omega.\overrightarrow{u_\theta}}_{\overrightarrow{v_e}}}$$

Ex : manège

Capacité exigible [2].

2. Utiliser le point coïncident pour exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. Citer et utiliser l'expression de l'accélération de Coriolis.

Un manège pour enfants tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de son axe de rotation (Oz). Le directeur du manège se déplace radialement à la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0.\overrightarrow{u_r}$ constante dans le référentiel tournant du manège. À l'instant $t = 0$, il est au centre du manège.

1. *Déterminer la vitesse du directeur du manège dans le référentiel tournant puis dans le référentiel lié au sol à un instant t quelconque.* (Réponses : $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M) = v_0\overrightarrow{u_r} + v_0\omega t\overrightarrow{u_\theta}$)
2. *Le directeur s'arrête de marcher à une distance r_0 du centre. Quelles sont alors la vitesse du directeur dans le référentiel tournant et celle dans le référentiel lié au sol ?* (Réponses : $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}(M) = r_0\omega\overrightarrow{u_\theta}$)

Ex : suite du manège avec composition des accélérations

1. *Déterminer l'accélération du directeur du manège dans le référentiel tournant puis dans le référentiel lié au sol à un instant t quelconque.* (Réponses : $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) = -v_0 t\omega^2\overrightarrow{u_r} + 2\omega v_0\overrightarrow{u_\theta}$)
2. *Le directeur s'arrête de marcher à une distance r_0 du centre. Quelles sont alors l'accélération du directeur dans le référentiel tournant et celle dans le référentiel lié au sol ?* (Réponses : $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M) = -r_0\omega^2\overrightarrow{u_r}$)

3 Loi de composition des accélérations

Composition des accélérations : Dans le cas général, la **loi de composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M)}_{\overrightarrow{a_a}} = \underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{a_r}} + \underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(P)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{a_c}}}$$

⋆ **accélération absolue** $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M)$,
⋆ **accélération relative** $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M)$,
⋆ **accélération d'entraînement** $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(P)$,
⋆ **accélération de Coriolis** $\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$.

ATTENTION, l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M)$ n'est pas toujours égale à $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \overrightarrow{a_e}$!

3.1 Cas de référentiels en translation

Pour une translation (même circulaire !), $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$. Donc $\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{a_e}$ est la même pour tout les points fixes de $\mathcal{R}'$.

Composition des accélérations : Pour une **translation** de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ à accélération $\overrightarrow{A}$, la **loi de composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M)}_{\overrightarrow{a_a}} = \underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{a_r}} + \underbrace{\overrightarrow{A}}_{\overrightarrow{a_e}}} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{0} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$$

3.2 Cas d'un référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Pour une rotation uniforme à ω, $\overrightarrow{a_e} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = -\mathrm{HM}.\omega^2.\overrightarrow{u_r}$.

Composition des accélérations : Pour une **rotation uniforme** de $\mathcal{R}'$ autour d'un axe fixe $\mathcal{R}$ à ω, la **loi de composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}}(M)}_{\overrightarrow{a_a}} = \underbrace{\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{a_r}} \underbrace{-\mathrm{HM}.\omega^2.\overrightarrow{u_r}}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathcal{R}'}(M)}_{\overrightarrow{a_c}}}$$