

## M2 : Dynamique en référentiel non galiléen

### 1 Observations expérimentales

#### 1.1 Forces d'inertie d'entrainement



FIGURE 1 – Éjection vers l'avant lors d'un brusque freinage sans ceinture (gauche). Un scientifique explorant le concept de « force centrifuge » (droite).

#### 1.2 Force d'inertie de Coriolis

\* Vents et courants marins : Le sens de rotation des courants terrestres dépend de l'hémisphère.

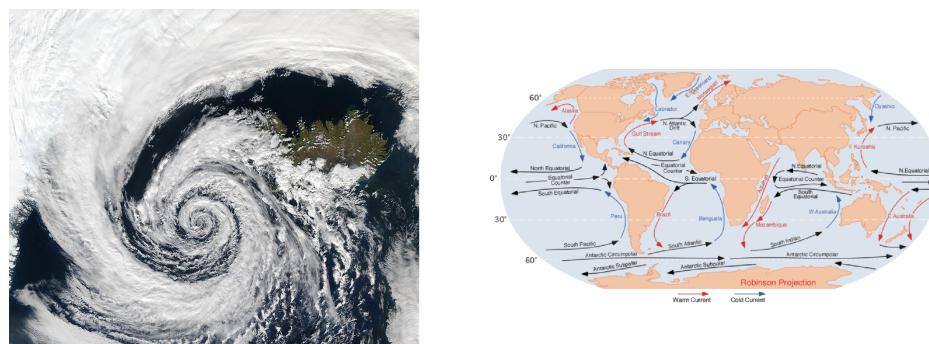


FIGURE 2 – Rotation anti-horaire autour d'une dépression de l'hémisphère Nord (gauche). Principaux courants océaniques (droite).

\* Manège inertiel : sur un plateau tournant, difficile de se déplacer en ligne ou de lancer une balle sur une cible ! Voir vidéo <https://youtu.be/8H3GF8Q73a8> au Palais de la découverte.

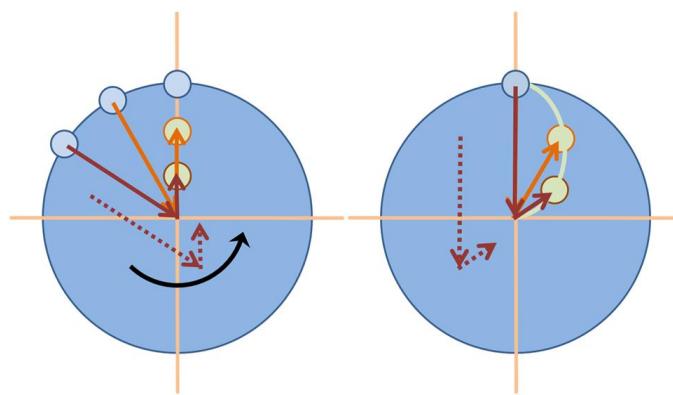


FIGURE 3 – Un lancer de balle réussi depuis le bord d'un plateau tournant vers le centre : trajectoire rectiligne vue depuis le sol (gauche), trajectoire courbe vue depuis le référentiel tournant (droite).

\* Pendule de Foucault : Le plan d'oscillation (vertical) d'un pendule tourne autour d'un axe vertical. À la latitude de Paris, ce plan tourne d'environ  $270^\circ$  par jour (un tour par jour aux pôles, pas de rotation sur l'équateur). Le physicien Léon Foucault a interprété ce phénomène par l'effet de la rotation de la Terre. La première démonstration publique date de 1851, le pendule étant accroché à la voûte du Panthéon de Paris.

## 2 Principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen

### 2.1 Référentiels galiléens

principe : D'après le **principe d'inertie** (1ère loi de Newton) : dans un référentiel galiléen, l'accélération d'un système isolé est nulle. Donc le système est immobile ou de trajectoire rectiligne uniforme.

→ Mais comment caractériser l'ensemble des référentiels galiléens ?

Considérons un système isolé dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. Alors  $\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{0}$  d'après le principe d'inertie. Sous quelles contraintes ce principe s'applique t-il aussi à un référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

D'après la loi de composition des accélérations :

$$\underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}}}_{\vec{0}} = \vec{a}_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Alors,  $\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$  quel que soit le mouvement de M  $\Leftrightarrow \vec{a}_e = \vec{0} = \vec{a}_c$ .

Donc  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne uniforme.

prop : Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

prop : Si un référentiel n'est pas en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen, alors il n'est pas galiléen.

ex : Supposons le référentiel terrestre galiléen. Alors le référentiel lié à un train à vitesse constante l'est aussi. En revanche, ce référentiel n'est pas galiléen si le train tourne, freine, ou accélère.

prop : Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen :

- \* mêmes valeurs de constantes fondamentales ( $h, c, G, e, \mu_0, k_B$ , etc),
- \* mêmes expressions des interactions fondamentales (gravitation  $\vec{F}_{A/B} = (-Gm_A m_B/d^2) \vec{u}_{A \rightarrow B}$ , etc),
- \* mêmes principes fondamentaux (PFD, TMC,  $c$  invariant, etc).

### 2.2 Forces d'inertie

Si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, comment adapter les principes de la mécanique ?

prop : Considérons un point M de masse  $m$  soumis à la résultante des forces  $\vec{F}$ . Le **principe fondamental de la dynamique** dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{F} + \underbrace{(-m \vec{a}_e)}_{\vec{F}_{ie}} + \underbrace{(-m \vec{a}_c)}_{\vec{F}_{ic}}$$

Tout se passe comme si le système subissait deux « pseudo-forces » supplémentaires.

prop : En particulier, le **principe d'inertie** dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{F} + \underbrace{(-m \vec{a}_e)}_{\vec{F}_{ie}} + \underbrace{(-m \vec{a}_c)}_{\vec{F}_{ic}}$$

| démo : Appliquer le PFD dans un référentiel galiléen puis utiliser la composition des accélérations.

def : On appelle **force d'inertie d'entrainement**  $\boxed{\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e}$ .

\* Si  $\mathcal{R}'$  en translation d'accélération  $\vec{A}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , alors  $\vec{F}_{ie} = -m \vec{A}$ .

\* Si  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme à  $\omega$ , en notant H le projeté de M sur l'axe de rotation :  $\vec{F}_{ie} = m \cdot HM \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r = mr\omega^2 \cdot \vec{u}_r$ .

def : On appelle **force d'inertie de Coriolis**  $\boxed{\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}}$ .

rq : Ces forces d'inertie sont appelées « pseudo-forces », car homogènes à une force mais ne découlent pas d'une interaction physique (gravité, électrostatique,...). Contrairement aux forces, leurs normes dépendent du référentiel !

## 2.3 Exemples pour référentiels en translation accélérée

Capacités exigibles<sup>1 2</sup>.

### 2.3.1 Ex1 : force d'éjection au freinage

Considérons une voiture roulant à 50 km/h. Elle peut mettre 2 s à s'arrêter en freinant brusquement. Calculer l'accélération d'entraînement et la force d'inertie subie par un passager de la voiture. Comparer à l'accélération de pesanteur.

### 2.3.2 Ex2 : position d'équilibre d'un pendule

Considérons un pendule dans un train freinant à  $\vec{a}_0$  constante. Exprimer l'angle  $\theta_{\text{eq}}$  du pendule à l'équilibre à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

rq : Pour un système de masse  $m$  soumis au champ de pesanteur  $\vec{g}$ , comme  $\vec{F}_{ie} \propto m$ , tout se passe comme si le système évoluait dans un **champ de pesanteur apparent**  $\vec{g}_{\text{app}}$  :

$$\vec{P}_{\text{app}} = \vec{P} + \vec{F}_{ie} = m \underbrace{(\vec{g} - \vec{a}_e)}_{\vec{g}_{\text{app}}}$$

## 2.4 Exemples pour référentiels en rotation uniforme

### 2.4.1 Ex1 : force axifuge

Estimer l'ordre de grandeur de l'accélération et de la force d'inertie subie par le passager d'un véhicule dans un rond-point.

### 2.4.2 Ex2 : direction de la force de Coriolis

Déterminer la direction de la force de Coriolis lors du déplacement sur un plateau tournant.

### 2.4.3 Ex3 : perle sur barre en rotation

Considérons une perle pouvant coulisser le long d'une barre horizontale. La barre tourne à  $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$  (vertical) constante autour d'une extrémité O fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Initialement, la perle est au repos par rapport à la barre à distance  $d$  de l'origine.

1. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la barre est-il galiléen ?
2. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur la perle dans  $\mathcal{R}'$ .
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  pour en déduire l'équation du mouvement. Commenter la direction de la réaction du support.
4. Résoudre l'équation du mouvement.

### 2.4.4 Ex4 : perle sur anneau en rotation

Considérons une perle pouvant coulisser le long d'un anneau vertical. On fait tourner le plan de l'anneau à  $\omega$  autour de l'axe vertical passant par son centre. En appliquant le PFD dans le référentiel lié à l'anneau, déterminer l'équation du mouvement de la perle ainsi que l'équation faisant intervenir la réaction du support. Exprimer les positions d'équilibre de la perle.

1. Pour une translation, déterminer la force d'inertie d'entraînement. Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.
2. Pour une rotation, exprimer la force d'inertie axifuge et la force d'inertie de Coriolis. Associer la force d'inertie axifuge à l'expression familière « force centrifuge ». Appliquer la loi de la quantité de mouvement, la loi du moment cinétique et la loi de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.

### 3 Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

#### 3.1 Rappels sur le moment cinétique et moment de forces d'un point matériel

Considérons un point M de masse  $m$  subissant la résultante  $\vec{F}$ , et un point A fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}'$ .

def : **Moment cinétique** de M par rapport à A :  $\boxed{\overrightarrow{L_A(M)} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}}$ . Décrit comment (et non pas pourquoi!) M tourne autour de A.

Interprétation de  $\overrightarrow{L_A}$  :

- Direction de  $\overrightarrow{L_A}$  : indique l'axe de rotation orienté, cf *règle de la main droite*.
- Norme de  $\overrightarrow{L_A}$  d'autant plus élevée que M tourne plus vite et/ou plus loin de A.
- Si  $\overrightarrow{L_A} = \vec{0}$ , alors  $\vec{v}_M$  est dirigée dans la direction de A.

def : **Moment d'une force**  $\vec{F}$  appliquée en M par rapport à A  $\boxed{\overrightarrow{M_A(F)} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$ .

Interprétation de  $\overrightarrow{M_A(F)}$  :

- Direction : la force  $\vec{F}$  a tendance à initier une rotation selon l'axe orienté par son moment.
- Norme : d'autant plus élevée que  $\vec{F}$  incite plus M à tourner autour de A.
- Si  $\overrightarrow{M_A} = \vec{0}$ , alors  $\vec{F}$  est dirigée dans la direction de A et n'a aucun rôle dans la rotation.

#### 3.2 Moment des forces d'inertie et de Coriolis

prop : Le **théorème du moment cinétique** appliqué à un point matériel M subissant  $\vec{F}$  par rapport à un point A fixe dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$\left( \frac{d\overrightarrow{L_A(M)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{M_A(\vec{F})} + \overrightarrow{M_A(F_{ie})} + \overrightarrow{M_A(F_{ic})}$$

#### 3.3 Ex1 : retour sur la position d'équilibre d'un pendule

Considérons un pendule dans un train freinant à  $\vec{a}_0$  constante. Exprimer l'angle  $\theta_{eq}$  à l'aide du théorème du moment cinétique.

#### 3.4 Ex2 : retour sur la perle sur anneau en rotation

Considérons une perle pouvant coulisser le long d'un anneau vertical. On fait tourner le plan de l'anneau à  $\omega$  autour de l'axe vertical passant par son centre. En appliquant le TMC dans le référentiel lié à l'anneau, déterminer l'équation du mouvement de la perle. Exprimer les positions d'équilibre de la perle.

### 4 Étude énergétique en référentiel non galiléen

#### 4.1 Travail et puissance des forces d'inertie et de Coriolis

prop : **La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas** car orthogonale à la vitesse.

\*  $P(\vec{F}_{ic}) = \vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}'} = -2m \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}) \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}'} = 0$ .

\*  $\delta W(\vec{F}_{ic}) = \overline{d\vec{OM}} \cdot \vec{F}_{ic} = \vec{v}_{\mathcal{R}'} dt \cdot \vec{F}_{ic} = 0$  car  $\vec{F}_{ic} \perp \vec{v}_{\mathcal{R}'}$ .

prop : Le **théorème de la puissance cinétique** appliqué à un point matériel M subissant  $\vec{F}$  dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$\left( \frac{dE_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = P(\vec{F}) + P(\vec{F}_{ie})$$

prop : Le **théorème de l'énergie cinétique** appliqué à un point matériel M subissant  $\vec{F}$  dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}) + W(\vec{F}_{ie})$$

## 4.2 Cas où $\vec{F}_{ie}$ dérive d'une $E_p$

### 4.2.1 Rappels sur l'énergie potentielle

def : Pour une force conservative,  $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p)$ , et de manière équivalente  $E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{OM} + \text{cte}$ .

ex1 : Retrouver l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort à partir de l'expression de la force de rappel.  
Puis faire le contraire.

ex2 : Retrouver l'expression de l'énergie potentielle de gravitation à partir de l'expression de la force de gravitation.  
Puis faire le contraire.

### 4.2.2 Énergie potentielle d'inertie d'entraînement

\* Cas de référentiels en translation à  $\vec{a}_0$  : Posons  $\vec{a}_0 = a_0 \vec{e}'_x$ . Alors  $\vec{F}_{ie} = -m a_0 \vec{e}'_x$ . Donc  $E_{pie} = m \cdot a_0 \cdot x' + \text{cte}$ .  $E_{pie}$  minimale pour  $x'$  décroissant, donc système attiré vers  $x'$  décroissant.

\* Cas de référentiels en rotation à  $\omega$  : Alors  $\vec{F}_{ie} = m \cdot r \cdot \omega^2 \vec{e}_r$ . Donc  $E_{pie} = - \int m r \omega^2 dr = -mr^2 \omega^2 / 2 + \text{cte}$ .  $E_{pie}$  minimale pour  $r$  croissant, donc effet axifuge.

prop : Le théorème de la puissance mécanique appliqué à un point matériel M subissant une résultante  $\vec{F}_{\text{non cons}}$  des forces non conservatives dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$\left( \frac{d(E_c + E_p + E_{pie})}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = P(\vec{F}_{\text{non cons}})$$

prop : Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à un point matériel M dans  $\mathcal{R}'$  non galiléen s'écrit :

$$\Delta(E_c + E_p + E_{pie}) = W(\vec{F}_{\text{non cons}})$$

## 4.3 Ex1 : retour sur la position d'équilibre d'un pendule

Considérons un pendule dans un train accélérant à  $\vec{a}_0$  constante. Exprimer l'angle  $\theta_{\text{eq}}$  à l'aide des énergies potentielles de pesanteur et d'inertie.

## 4.4 Ex2 : retour sur la perle sur anneau en rotation

Exprimer en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle d'inertie. En déduire les positions d'équilibre et leur stabilité.

## 5 Interlude : comment prévoir si un référentiel est galiléen ?

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique. Donc où les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis doivent avoir un rôle négligeable.

\* 1er critère : Calculer  $\|\vec{F}_{ie}\|$  et  $\|\vec{F}_{ic}\|$  et les comparer aux forces en présence (gravitation, etc). En particulier, comparer  $\vec{a}_e$  au champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Les effets d'inertie seront d'autant plus faibles que les rotations sont lentes (donc  $r\omega^2$  faible) et que les mouvements relatifs sont à faible vitesse (donc  $\vec{a}_c$  faible).

ex : La terre se situe à environ 150 millions de kilomètres du Soleil. Estimer l'accélération d'entraînement due à l'orbite terrestre autour du Soleil subie au niveau de la Terre.

Réponse :  $a_e = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2} \ll g$ . Donc effet faible mais il contribue au phénomène de marée.

ex : Le rayon terrestre est environ 6400 kilomètres. Estimer l'accélération d'entraînement maximale due à la rotation terrestre autour de son axe.

Réponse :  $a_e = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \ll g$ . Donc effet faible mais pas forcément négligeable qu'on va étudier dans la partie suivante.

\* 2e critère : Mais cela ne suffit pas car les effets des forces d'inertie peuvent se cumuler au cours du temps. Donc dans le cas de référentiels en rotation, ces effets seront en général négligeables si la durée de l'expérience est faible devant la période de révolution.

ex : Le plan d'oscillation d'un pendule semble immobile dans le référentiel terrestre quand on n'observe que quelques périodes. Mais il tourne tout de même de  $270^\circ$  par jour à latitude parisienne !

prop : Critères de caractère « galiléen » d'un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen :

- \*  $\|\vec{F}_{ie}\|, \|\vec{F}_{ic}\| \ll$  autres forces,
- \* durée de l'expérience  $\ll$  période de rotation.

## 6 Mécanique dans le référentiel terrestre

L'objectif de cette partie est d'étudier les conséquences des forces d'inertie dans le référentiel terrestre, qui ne sera donc pas considéré comme galiléen dans cette partie.

### 6.1 Géographie terrestre

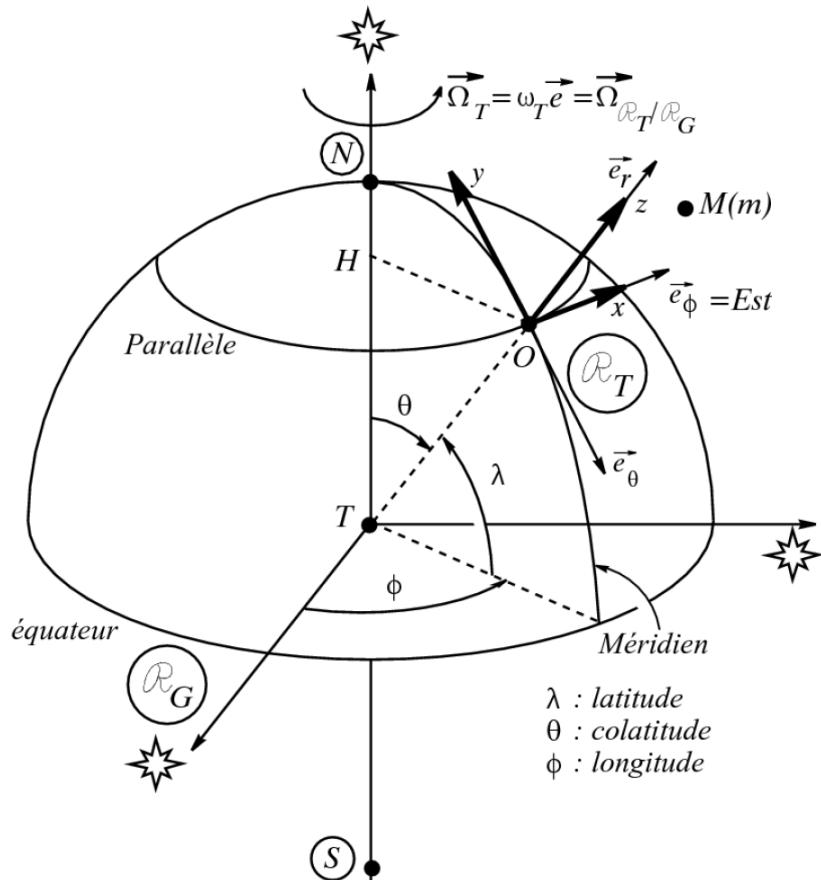
\* On notera  $\mathcal{R}_G$  le **référentiel géocentrique**, quasiment toujours supposé approximativement galiléen (sauf pour interpréter le phénomène de marées).

\* On notera  $\mathcal{R}_T$  le **référentiel terrestre**, en rotation par rapport à  $\mathcal{R}_G$  galiléen à vecteur rotation  $\vec{\Omega}_T$  de norme  $\omega_T$ .

\* Pour repérer un point O de la surface : coordonnées sphériques  $r = TO \simeq 6400$  km,  $\theta$  et  $\phi$ . L'angle  $\lambda = \pi/2 - \theta$  est appelé « **latitude** ». Ainsi, en O :  $\vec{e}_r$  aligné avec le rayon terrestre,  $\vec{e}_\theta$  dirige un déplacement vers le Sud à la surface,  $\vec{e}_\phi$  dirige un déplacement vers l'Est.

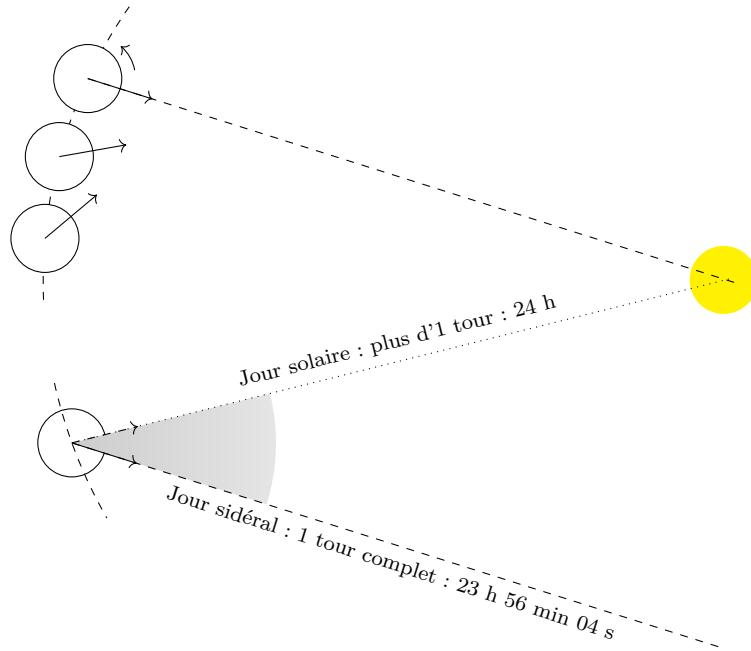
\* Pour repérer le mouvement de M autour de O : coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  de repère lié à la surface. Ainsi, sur le schéma :  $\vec{e}_z$  suivant  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_x$  suivant l'Est,  $\vec{e}_y$  suivant le Nord.

\* Pour un mouvement proche de la surface et loin des pôles,  $OM \ll HO$  et  $OM \ll TO$ .



\* On appelle **jour solaire** la durée pour que le Soleil pointe de nouveau dans la même direction, cf schéma suivant. Il vaut 1 jour solaire = 24 h = 86400 s. On appelle **jour sidéral** la durée que met la Terre à faire un tour sur elle-même.  $T_T = 1$  jour sidéral =  $(365, 25/366, 25) \times 1$  jour solaire  $\simeq 23$  h 46 min 4s  $\simeq 86164$  s  $\leq 1$  jour solaire.

\* La vitesse de rotation de la Terre sur elle-même vaut donc  $\omega_T = 2\pi/T_T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (à cette précision, on trouve la même valeur en prenant un jour sidéral ou solaire).



## 6.2 Actions mécaniques dans le référentiel terrestre

| schéma : Soit un point  $M$  situé en  $O$  au niveau de la surface, fixe dans le référentiel terrestre. Déterminer les directions des forces subies.

- Gravitation : Dans l'approximation d'une Terre sphérique, tout se passe comme si sa masse était concentrée en son centre  $T$  :  $\vec{F}(M) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{TM^2} \cdot \vec{e}_r$ .

Avec  $TM \simeq TO \simeq 6400 \text{ km}$ , et la constante gravitationnelle  $\mathcal{G} = 6,67408(31) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Champ gravitationnel  $\vec{G}$  tel que  $\vec{F}(M) = m \cdot \vec{G}$ , homogène à accélération.

Au niveau de la surface  $\|\vec{G}\| = GM_T/R_T^2 \simeq 9,82 \text{ m.s}^{-2}$ .

- Force d'inertie d'entrainement :

En  $O$  :  $\vec{a}_e = -\vec{HO} \cdot \omega_T^2 \cdot \vec{e}_{HO}$ . Avec  $HO = R_T \cos \lambda$ ,  $\vec{e}_{HO} = \cos \lambda \cdot \vec{e}_z - \sin \lambda \cdot \vec{e}_y$ .

ODG typique  $a_{ie} \simeq R_T \cdot \omega_T^2 \simeq 3 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \ll g$ .

Donc  $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = m \cdot R_T \cdot \omega_T^2 \cdot \cos \lambda \cdot (\cos \lambda \cdot \vec{e}_z - \sin \lambda \cdot \vec{e}_y)$ .

Tend à compenser partiellement la gravitation, cf définition du Poids.

- Force d'inertie de Coriolis :

\* Cas d'une chute verticale : déviation vers l'Est.

\* Mouvement horizontal dans hémisphère Nord : déviation vers la droite.

\* Mouvement horizontal dans hémisphère Sud : déviation vers la gauche.

| schéma : Déterminer les directions des forces subies dans ces différents cas.

| exo : ODG de la force d'inertie de Coriolis subie par un sprinteur.

## 6.3 Définition du poids

def expérimentale : Considérons un objet proche de la surface terrestre. On constate qu'on doit lui appliquer une force donnée pour qu'il reste immobile. On en déduit qu'il est constamment soumis à une force, appelée **poids**  $\vec{P}$ .

def : Le poids définit ainsi la notion de direction **verticale**, par exemple en observant la direction d'équilibre d'un pendule<sup>3</sup>.

3. CE : Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel.

def : Dans le référentiel terrestre, le **poids**  $\vec{P}$  d'un corps M de masse  $m$  est la somme de la force gravitationnelle  $\vec{F}$  de la Terre sur M, et la force d'inertie d'entrainement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique :

$$\underbrace{\vec{P}}_{\text{poids}} = \underbrace{\vec{F}(M)}_{\text{gravitation}} + \underbrace{\vec{F}_{ie}(M)}_{\text{inertie}} = m \cdot \vec{G}(M) + m\omega_T^2 \cdot \vec{HO}$$

def : Le **champ de pesanteur terrestre**  $\vec{g} = \vec{P}/m$  est :

$$\vec{g} = \vec{G}(M) + \omega_T^2 \cdot \vec{HM}$$

schéma : En exagérant par souci de lisibilité, indiquer la direction du poids en différentes positions de la surface terrestre.

prop : La force d'inertie d'entrainement est maximum à l'équateur, donc le poids y est inférieur ( $9,79 \text{ m.s}^{-2}$ ) au poids aux pôles ( $9,83 \text{ m.s}^{-2}$ ).

ODG : Comparons les deux termes de  $\vec{g}$  à l'équateur ( $\cos \lambda = 1$ ) :

$$\frac{\omega_T^2 \cdot R_T \cos \lambda}{GM_T/R_T^2} = \frac{R_T^3 \cdot \omega_T^2}{G \cdot M_T} = 3,5 \cdot 10^{-3} \simeq 0,3\%$$

## 7 Exemples de conséquences du caractère non galiléen du référentiel terrestre

### 7.1 Pendule de Foucault

Considérons un pendule simple : un fil de masse négligeable et longueur  $\ell$  est libre de pivoter autour de son attache dans toutes les directions, à l'autre extrémité est accrochée une masse  $m$ . Le point d'attache est fixe dans le référentiel terrestre, on lâche la masse sans vitesse initiale.

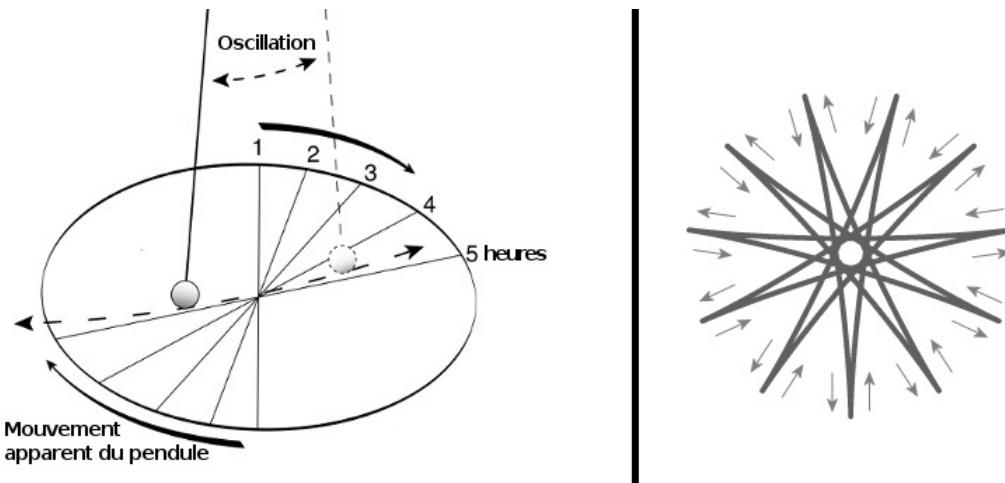


FIGURE 4 – Gauche : illustration de la rotation du plan d'oscillation au cours du temps. Droite : vue de dessus en exagérant l'effet de la rotation de la Terre. La trajectoire de la masse ne forme pas des segments mais est courbe.

observations : On observe que le plan d'oscillation du pendule est en rotation autour d'un axe vertical ! Plus précisément :

- \* le plan d'oscillation tourne dans le sens horaire dans l'hémisphère nord et dans le sens inverse dans l'hémisphère sud.

- \* le plan d'oscillation effectue un tour complet en un jour sidéral aux pôles (soit 23 h 56 min 4 s), mais qu'ailleurs la durée est plus longue. À une latitude de  $30^\circ$ , elle est de 2 jours et à  $45^\circ$  de latitude de 1,4 jour. À l'équateur le plan d'oscillation est fixe.

histoire : La première expérience a lieu le 3 janvier 1851 dans la cave de la maison de Léon Foucault à Paris. La première démonstration publique date de 1851, le pendule étant accroché à la voûte du Panthéon de Paris. L'intérêt du pendule, imaginé et réalisé par Foucault, est de mettre en évidence la rotation de la Terre, manifestée par la déviation constante du plan d'oscillation du pendule.

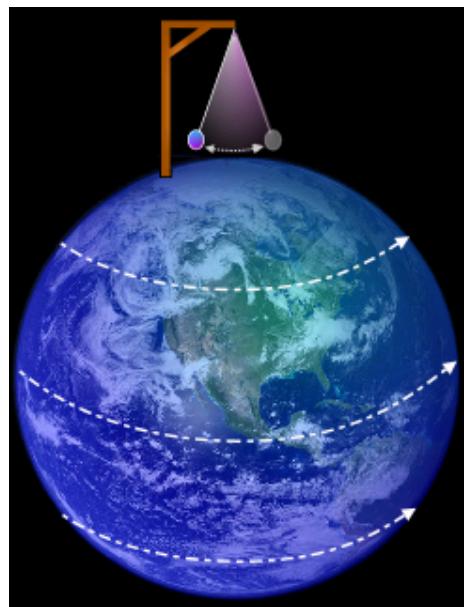
*Il ne semble pas que Foucault ait été informé des travaux de Coriolis portant sur les lois de la dynamique dans un référentiel non inertiel, datant de 1832. C'est donc de manière purement empirique qu'il mena son expérience, et seulement après coup que les mécaniciens expliquèrent l'expérience par l'utilisation de la force de Coriolis.*

### 7.1.1 Interprétation dans le référentiel terrestre non galiléen

| exo : Expliquer pourquoi dans l'hémisphère Nord, le plan d'oscillation tourne dans le sens horaire vu de dessus.

### 7.1.2 Interprétation dans le référentiel géocentrique galiléen

Soit un pendule de Foucault au pôle nord. Le pendule oscille dans un plan fixe par rapport aux étoiles alors que dessous, la Terre tourne indépendamment. C'est pourquoi la période de rotation du plan d'oscillation est d'un jour aux pôles<sup>4</sup>.



### 7.1.3 Mise en équation

Pour simplifier, nous supposerons l'amplitude des oscillations suffisamment faible pour admettre que la masse oscillante du pendule se déplace horizontalement. Notons  $Oxy$  ce plan horizontal, avec  $O$  position de la masse au repos,  $Ox$  axe horizontal dirigé vers l'est (et donc tangent au parallèle), et  $Oy$  dirigé vers le nord (et donc tangent au méridien). Le troisième axe  $Oz$  sera vertical, dirigé vers le haut. On note  $\omega_0$  la pulsation propre du pendule,  $\Omega$  la vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique, et  $\theta$  la latitude. On admet<sup>5</sup> que les équations du mouvement sur  $x$  et  $y$  donnent :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\dot{y}\Omega \sin(\theta) \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\dot{x}\Omega \sin(\theta) \end{cases}$$

### 7.1.4 Résolution numérique

La résolution analytique de ce système est possible mais pas à notre programme<sup>6</sup>. Proposons une résolution numérique.

| Euler : Pour une application de la méthode d'Euler, déterminer le schéma numérique à appliquer pour calculer à l'étape  $i$  les valeurs de  $\dot{x}_{i+1}$ ,  $x_{i+1}$ ,  $\dot{y}_{i+1}$ ,  $y_{i+1}$  à partir de  $\dot{x}_i$ ,  $x_i$ ,  $\dot{y}_i$ ,  $y_i$ .

| odeint : Pour une utilisation de la fonction `odeint`, mettre le système sous la forme  $dX/dt = F(X, t)$  avec  $X = [\dot{x}, x, \dot{y}, y]$  en précisant la fonction  $F$ . Compléter dans le code suivant après `def F(X, t)` :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 t = np.arange(0, 40, 0.01) # liste des instants
6
7 Omega_T = 0.1             # pulsation de la rotation terrestre (valeur exageree pour mieux voir l'
8 effet)
9 omega_0 = 1.0              # pulsation propre du pendule
10 latitude = np.pi/3        # latitude en rad
11 CI = [0, 1, 0, 0]          # CI sur [xpoint, x, ypoint, y]
12
13 def F(X, t):
14     ### a completer
15
16 solution = odeint(F, CI, t)
17

```

4. Des animations du phénomène dans la vidéo *Le pendule de Foucault*, <https://youtu.be/YhXLxc1hzxM>.

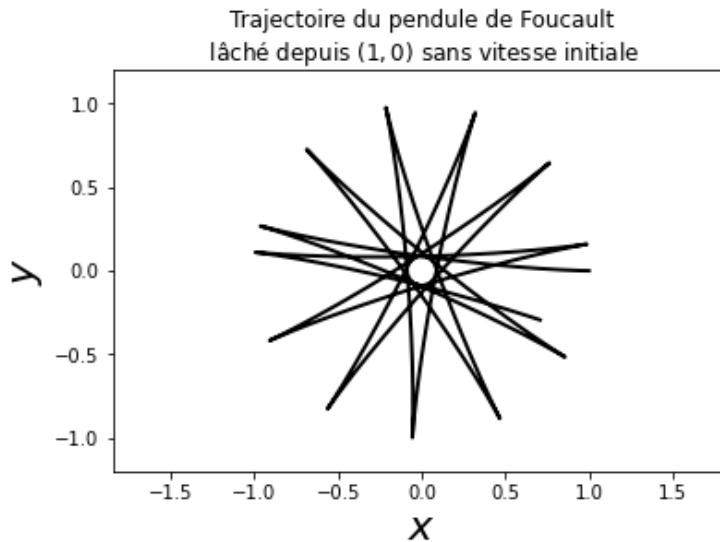
5. Par exemple l'épreuve 2022-ÉNS-Physique C-PC.

6. En posant  $u = x + iy$ , on peut obtenir une ED sur  $u$ . Mais l'interprétation du résultat n'est pas triviale.

```

18 plt.axis('equal')
19 plt.xlim([-1.2,1.2])
20 plt.ylim([-1.2,1.2])
21 plt.xlabel(u'$x$', fontsize=22)
22 plt.ylabel(u'$y$', fontsize=22)
23 plt.plot(solution[:,1], solution[:,3], 'k', linewidth=2)
24 plt.title(u'Trajectoire du pendule de Foucault\nlâché depuis $(1,0)$ sans vitesse initiale')
25 plt.show()

```



## 7.2 Rotation des vents géostrophiques (ancienne approche doc)

Un vent géostrophique est un vent résultant de l'équilibre entre forces de pression et de Coriolis. Il souffle parallèlement aux isobares. Dans l'hémisphère Nord, les vents tournent dans le sens trigonométrique autour des dépressions (minimum de pression), et dans le sens horaire autour des anticyclones (maximum de pression). C'est le contraire dans l'hémisphère Sud.

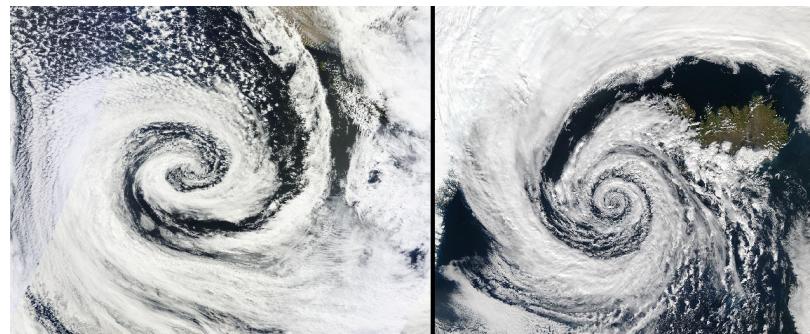
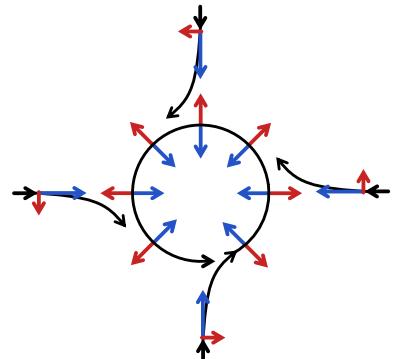


FIGURE 5 – Deux exemples de systèmes dépressionnaires qui ne tournent pas dans le même sens (Sud à gauche, Nord à droite). *Source : wiki.*

Le schéma ci-contre représente un exemple de trajectoire de vents autour d'une dépression tournant en sens trigonométrique dans l'hémisphère Nord. Elle s'explique par la contribution de deux forces : Coriolis toujours orthogonale à la trajectoire (vers la droite dans le Nord), l'autre est toujours dirigée vers le centre (basse pression).

## 7.3 Les marées (ancienne approche doc)

La marée est la variation (quasi-)périodique du niveau des mers et océans. On observe principalement deux marées par jour. Son amplitude dépend de nombreux facteurs et varie beaucoup d'un endroit à l'autre. Elle peut être quasiment indétectable mais atteint parfois 15 m dans la baie de Fundy au Canada et 13 m au Mont Saint-Michel. Dès l'Antiquité, on remarqua une coïncidence entre les marées et la position de la Lune.



Considérons un système de masse  $m$  dans le référentiel terrestre au niveau de sa surface. Ce système subit la gravitation terrestre ainsi que les forces d'inertie due à la rotation de la Terre sur elle-même, la résultante donnant alors son poids. Mais on peut montrer qu'il subit une force supplémentaire due à la présence des autres astres : Soleil, Lune, etc.

prop : Dans le référentiel géocentrique, la force de marée due au Soleil  $S$  subie par un système  $M$  de masse  $m$  à la surface terrestre s'écrit :

$$\vec{f}_m^S = m \left( \vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(O) \right)$$

où  $\vec{G}_S$  est le champ gravitationnel produit par le Soleil, et  $O$  est le centre de la Terre.

- \* Le terme  $m\vec{G}_S(M)$  est simplement la force gravitationnelle du Soleil sur  $M$ .
- \* Le terme  $-m\vec{G}_S(O)$  est la force d'inertie d'entrainement due à la translation circulaire du référentiel géocentrique autour du référentiel de Copernic. Car en effet, pour la Terre dans le référentiel de Copernic,  $\vec{a}_T = \vec{G}_S(O)$ .

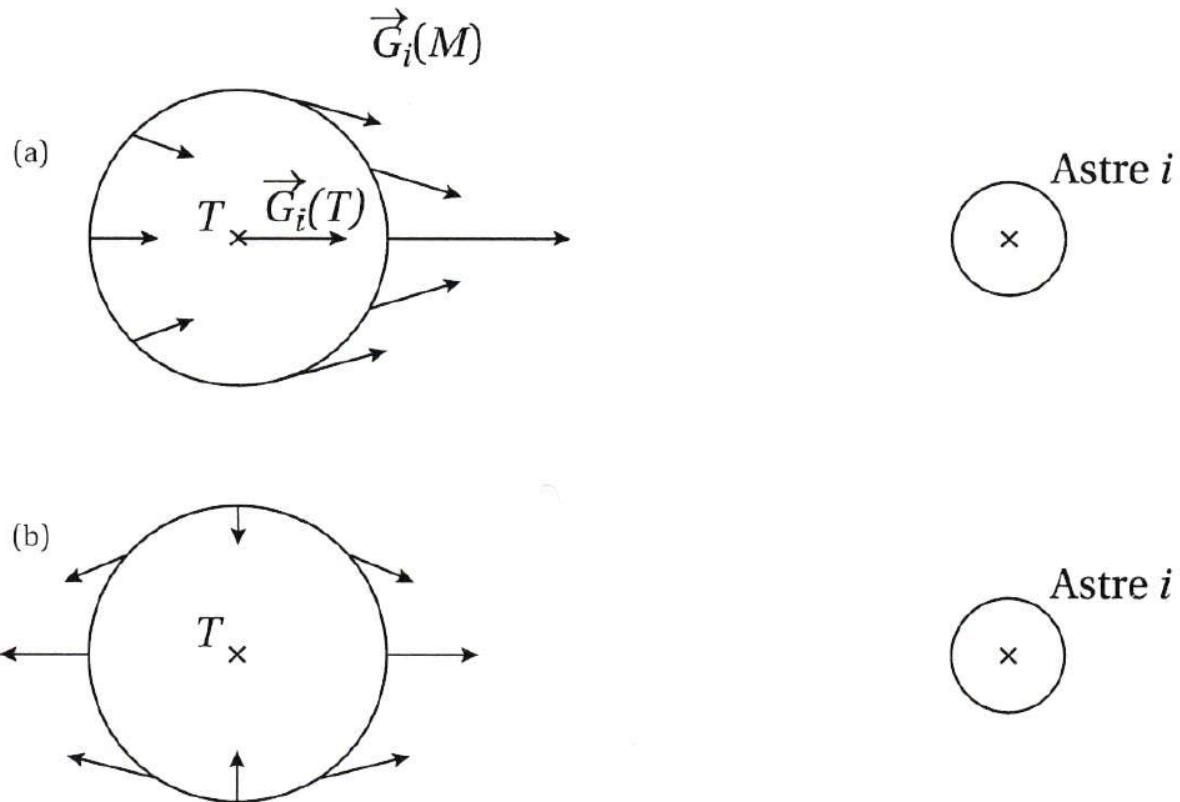
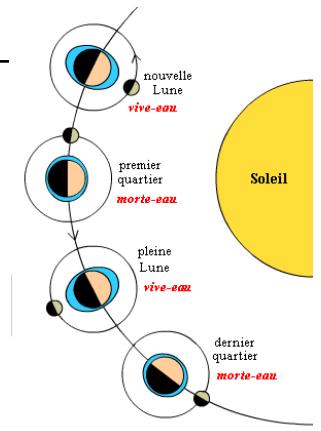


FIGURE 6 – (a) Champ de gravitation appliquée par l'astre  $i$  en différents points ; la direction et la norme ne sont pas uniformes. (b) Champ différentiel résultant.

astre	Soleil	Lune	Vénus	Jupiter
masse (kg)	$1,99 \cdot 10^{30}$	$7,35 \cdot 10^{22}$	$4,92 \cdot 10^{24}$	$1,91 \cdot 10^{27}$
distance minimale à la Terre (m)	$1,50 \cdot 10^{11}$	$3,84 \cdot 10^8$	$4,2 \cdot 10^{10}$	$6,3 \cdot 10^{11}$
accélération de marée ( $\text{m.s}^{-2}$ )	$5 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-12}$

rq : Les effets de marée peuvent être suffisamment intenses pour déformer voire disloquer des corps solides ! Shoemaker-Levy 9, officiellement désignée par D/1993 F2 et parfois abrégée en SL9, est une comète qui s'est disloquée lors de son approche de la planète Jupiter puis est entrée en collision avec elle au mois de juillet 1994.