MF0 : Statique des fluides en référentiel non galiléen

1 Approche expérimentale

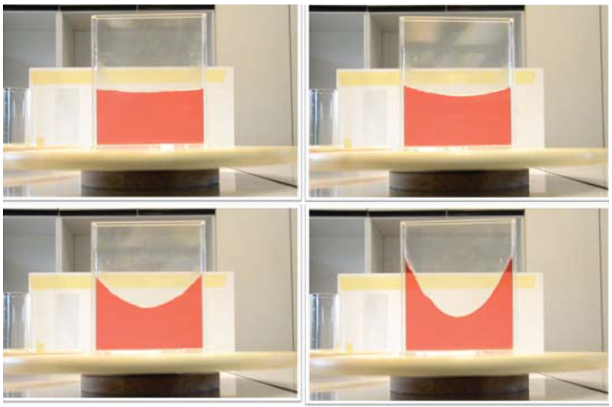

FIGURE 1 – Récipient contenant du jus de canneberge sur un plateau tournant à vitesse angulaire croissante. Souce : ULB

FIGURE 2 – The Liquid Mirror Telescope, operated by the NASA Orbital Debris Program Office at the NASA Orbital Debris Observatory in Cloudcroft, New Mexico from 1996 to 2000. Source : wiki.

⋆ Si un récipient contenant un liquide freine ou accélère, la surface du liquide à l'équilibre n'est plus horizontale !
→ Risque de renversement : camion-citerne, serveur de café, etc.

⋆ Si un récipient contenant un liquide est en rotation, la surface du liquide suit une forme parabolique.
→ Application par exemple au miroir liquide (mercure) de forme parabolique.

2 Rappel de PCSI : pression et contrainte normale

2.1 Notion de particule de fluide

• échelle microscopique : la matière est discontinue à l'échelle atomique. ODG $L \simeq 10^{-10}$ m.
• échelle macroscopique : la matière semble continue. ODG $L \simeq 1$ m. Les grandeurs intensives (température T, masse volumique μ, etc) peuvent être inhomogènes.
• échelle mésoscopique : échelle suffisamment petite pour pouvoir considérer les grandeurs intensives homogènes, mais suffisamment grande pour contenir un grand nombre d'atomes et pouvoir définir les grandeurs thermodynamiques p, T, μ, etc. ODG $L \simeq 1$ μm.

def : On appelle « **particule de fluide** » une portion mésoscopique fermée de fluide suffisamment petite pour que les grandeurs intensives y soient uniformes. On peut donc par exemple parler de « masse volumique d'une particule de fluide ».

2.2 Force de pression

def : La **pression** $p(M)$ en un point M à la surface dS d'une particule de fluide est définie par la force extérieure normale en M :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\text{int}} = p(M).d\overrightarrow{S}_{\text{ext}\to\text{int}}} \tag{1}$$

interprétation : Une pression est une force par unité de surface.
unité : Unité équivalente SI : pascal Pa = N.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-2}. Unité courante : 1 bar = 10^5 Pa.
ODG[1] :

Système	Vide interstellaire	Vide d'une pompe rotative	Seuil de douleur de surpression acoustique	Augmentation de p en plongeant de 1 m sous l'eau
Pression (Pa)	10^{-15} - 10^{-8}	10^{-1}	10^2	10^4

Pression atmosphérique à 4000 m d'altitude	Pression atmosphérique au niveau de la mer	Bouteille de champagne	Pour former un diamant	Pression au cœur du Soleil
$0,62.10^5$	$1,013.10^5$	5.10^5	10^{10}	$3,5.10^{16}$

2.3 Résultante des forces de pression

def : La résultante $\overrightarrow{F_p}$ des forces de pression sur un système Σ fermé de surface S est $\boxed{\overrightarrow{F_p} = -\oiint_{M\in S} p(M).d\overrightarrow{S}}$ où le cercle sur le symbole intégrale indique que S est une surface fermée, et par convention $\overrightarrow{dS}$ est orienté vers l'extérieur (d'où le signe négatif).

prop : Cas particulier 1 : si la pression est uniforme, les forces de pressions se compensent : $\boxed{\oiint_{M\in S} p(M).d\overrightarrow{S} = \overrightarrow{0}}$.

2.4 Poussée d'Archimède

prop : Cas particulier 2 : pour un objet de volume V immergé dans un fluide incompressible (masse volumique μ) au repos dans $\overrightarrow{g}$ homogène, la résultante des forces de pression est la poussée d'Archimède $\boxed{\overrightarrow{F_p} = -\mu V\overrightarrow{g}}$.
rq : Pour un solide de masse volumique μ_s immergé dans un fluide de masse volumique μ_f, la résultante du poids $\overrightarrow{P}$ et de la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$ s'écrit, avec z vers le haut :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi} = (\mu_f - \mu_s)Vg\overrightarrow{u_z}$$

⋆ Donc il suffit de comparer μ_f et μ_e (ou leurs densités) pour savoir si le solide va flotter ou couler.
⋆ Pour une phase condensée dans l'air, quasiment toujours $\mu_f \ll \mu_s$. Donc **la poussée d'Archimède est souvent négligeable dans l'air**.
⋆ Pour une phase condensée dans l'eau, on peut rarement négliger un des termes. Donc **la poussée d'Archimède est quasiment toujours à prendre en compte dans l'eau** !

2.5 Densité volumique des forces de pression

prop : La densité volumique de forces de pression $\overrightarrow{f_p} = d\overrightarrow{F}/dV$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p)} \qquad (2)$$

interprétation : Les hautes pressions poussent les particules de fluide vers les basses pressions. Donc force dirigée vers les basses pressions, donc opposée au gradient de pression.
→ On peut interpréter p comme une énergie potentielle volumique associée aux forces de pression.
prop : Effet nul si le champ de pression est homogène.
unité : f_p en Pa.m^{-1} = N.m^{-3} = kg.m^{-2}.s^{-2}.

démo exigible en base cartésienne : *Idée : Exprimer la résultante des forces de pression sur un volume mésoscopique cubique.*

1. Beaucoup d'autres intéressants sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Ordres_de_grandeur_de_pression`.

3 Rappel PCSI : statique des fluides en référentiel galiléen

3.1 Densité volumique de force de pesanteur

prop : La densité volumique de forces de pesanteur dans un fluide de masse volumique μ homogène dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ homogène :

$$\boxed{\overrightarrow{f_g} = \mu.\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mu.g.z)}$$

interprétation : La pesanteur attire les particules vers la direction de $\overrightarrow{g}$, donc z décroissant, donc opposé au gradient de z.

→ On peut interpréter μgz comme une énergie potentielle volumique de pesanteur.

ODG : Proche de la surface terrestre : $f_g \simeq 10$ N.m^{-3} dans l'air, $f_g \simeq 10^4$ N.m^{-3} dans l'eau.

| démo : *Exprimer le poids d'un volume mésoscopique de fluide.*

3.2 Relation fondamentale de la statique des fluides en référentiel galiléen

Soit un fluide de masse volumique μ à l'équilibre dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Dans un référentiel galiléen, la **relation de la statique des fluides** s'écrit :

$$\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \mu.\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}}$$

En choisissant un repère tel que $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, cette relation devient : $\boxed{\dfrac{dp}{dz} + \mu.g = 0}$

| démo : *Appliquer le PFD à un volume mésoscopique de fluide à l'équilibre.*
| exo de cours 1 : *Dans l'hypothèse d'un fluide peu compressible dans le champ de pesanteur homogène, quelle est la pression quand on plonge sous l'eau à une profondeur d ?*
| exo de cours 2 : *Dans l'hypothèse de l'atmosphère isotherme de masse molaire moyenne M, déterminer l'expression du champ de pression $p(z)$ en fonction de l'altitude z.*

4 Statique des fluides en référentiel non galiléen

4.1 Densité volumique de forces d'inertie

prop : La densité volumique des forces d'inertie d'entrainement est [2] : $\boxed{\overrightarrow{f_{ie}} = -\mu.\overrightarrow{a_e}}$

rq : Équivalent à l'effet d'une pesanteur en prenant $-\overrightarrow{a_e}$ à la place de $\overrightarrow{g}$.

| démo : *Exprimer la force d'inertie d'entrainement sur un volume mésoscopique de fluide.*

⋆ Cas de référentiels en translation rectiligne uniformément accélérée : $\overrightarrow{a_e} = a_0.\overrightarrow{u_x}$ donne

$$\boxed{\overrightarrow{f_{ie}} = -\mu.\overrightarrow{a_e} = -\mu.a_0.\overrightarrow{u_x} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mu.a_0.x)}$$

⋆ Cas de référentiels en rotation uniforme : $\overrightarrow{a_e} = -r\omega^2.\overrightarrow{e_r}$ donne

$$\boxed{\overrightarrow{f_{ie}} = -\mu.\overrightarrow{a_e} = \mu.r\omega^2.\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{\text{grad}}(\mu.\omega^2.r^2/2)}$$

4.2 Relation fondamentale

Soit un fluide de masse volumique μ à l'équilibre dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Dans un référentiel non galiléen, la **relation de la statique des fluides** s'écrit :

$$\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \mu.\overrightarrow{g} - \mu.\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{0}}$$

2. CE : Établir et utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique.

| démo : *Appliquer le PFD à un volume mésoscopique de fluide à l'équilibre dans un référentiel non galiléen.*

prop : Tout se passe comme si le fluide subissait le champ de pesanteur apparent $\overrightarrow{g}_{\text{app}} = \overrightarrow{g} - \overrightarrow{a_e}$.

4.3 Cas d'une translation accélérée

Considérons un camion accélérant à $\overrightarrow{a_0} = a_0.\overrightarrow{u_x}$ constante. Il porte une citerne rectangulaire contenant un liquide de masse volumique μ. À l'interface entre le liquide et l'air, la pression est égale à p_0. Déterminer l'allure de la surface libre du fluide.

4.4 Cas d'une rotation uniforme

Considérons un bécher cylindrique en rotation autour de son axe à ω constante. Il contient un liquide de masse volumique μ. À l'interface entre le liquide et l'air, la pression est égale à p_0. Déterminer l'allure de la surface libre du fluide.