MF1 : Description d'un fluide en mouvement

C'est un chapitre de *cinématique des fluides* : on s'intéresse à la description des écoulements observés mais sans expliquer leurs causes (forces, énergie d'interaction). Ce sera l'enjeu des chapitres suivants qui traiteront de *dynamique des fluides*.

Importance de la mécanique des fluides

Contrairement aux solides, les fluides peuvent facilement s'écouler, qu'ils soient à l'état de liquide ou de gaz. Les situations d'écoulement possibles sont incroyablement variées.

⋆ L'écoulement de l'air autour d'un véhicule est notamment à l'origine de forces de frottements (trainée), et de la portance des avions ou des foils[1].

Figure 1 – Vortex formé par une aile d'avion.

Figure 2 – L'écoulement est en général turbulent à l'arrière d'une voiture.

⋆ Les liquides aussi mettent en jeu des écoulements variés.

Figure 3 – Séance de TP de mécanique des fluides.

Figure 4 – Compétition entre gravité et tension superficielle.

⋆ La structure mathématique de l'équation fondamentale de la dynamique des fluides (Navier-Stokes, cf chapitres suivants) explique l'abondante variété des écoulements. C'est une équation aux dérivées partielle (en temps et espace) non-linéaire.

Malgré les progrès des résolutions numériques, l'étude analytique des équations aux dérivées partielles est toujours un sujet de recherche actif. Notamment, la résolution des équations de Navier-Stokes est un des sept défis mathématiques réputés insurmontables, posés par l'Institut de mathématiques Clay en 2000. La résolution de chacun des problèmes est dotée d'un prix de 1M$ américains offert par l'institut. En 2019, six des sept problèmes demeurent non résolus.

1. Un foil est une aile profilée fixée sous une embarcation sous l'eau qui permet de soulever le véhicule pour diminuer la trainée.

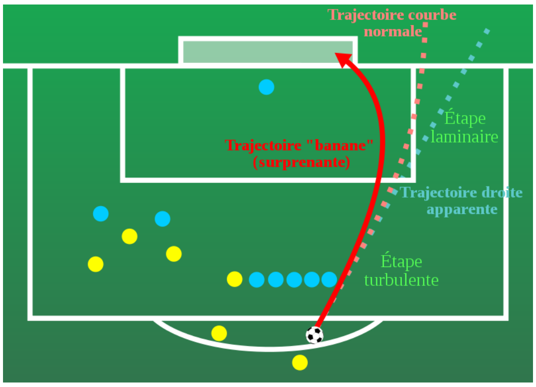


FIGURE 5 – Le 3 juin 1997, le Brésilien Roberto Carlos tire un coup franc à la trajectoire étonnamment courbée. Mais il fut expliqué ensuite par des chercheurs de Polytechnique (Guillaume Dupeux *et al.* 2010 *New J. Phys.* 12 093004).

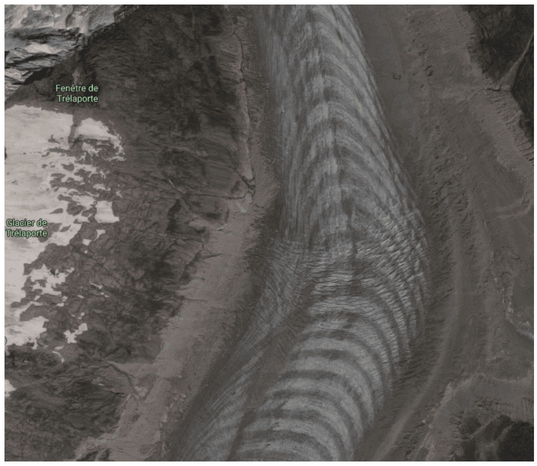


FIGURE 6 – Même les solides peuvent (lentement) s'écouler. Ici la « Mer de Glace » près du Mont Blanc. On reconnait un champ des vitesses parabolique de type « Poiseuille ».

1 Champ eulérien des vitesses

1.1 Rappel sur la notion de particule de fluide

def : On appelle « **particule de fluide** » une portion mésoscopique fermée de fluide. Ainsi, les grandeurs intensives y sont homogènes. On peut donc par exemple parler de « masse volumique d'une particule de fluide ».
prop : Une particule de fluide contient beaucoup d'atomes, alors l'agitation thermique y est moyennée. On parlera donc de « vitesse de la particule de fluide » .
rq : Quand on parle de vitesse en un point d'un écoulement, on parle de vitesse d'une particule de fluide en ce point, pas de la vitesse d'un atome en ce point !

→ Schématiquement, le principe fondamental de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes) provient de l'application du PFD à une particule de fluide.

1.2 Description eulérienne

• approche lagrangienne : On suit une particule de fluide tout au long de son mouvement. On décrit l'évolution des paramètres (position $\overrightarrow{OM}_{\text{part}}(t)$, vitesse $\overrightarrow{v}_{\text{part}}(t)$, $\mu_{\text{part}}(t)$, etc) de la particule de fluide au cours du temps. C'est l'approche usuelle en mécanique vue pour l'instant en PCSI/PC.

• approche eulérienne [2] : On observe un point M fixe de l'espace. On décrit l'évolution des paramètres ($\overrightarrow{v}(M,t)$, $\mu(M,t)$, etc) du fluide en ce point au cours du temps. Ainsi, on voit passer différentes particules de fluides au cours du temps.

1.3 Champ des vitesses en description eulérienne

def : Une **ligne de courant** à un instant t est une ligne de champ eulérien des vitesses à cet instant t. Elle est donc tangente en tout point M à $\overrightarrow{v}(M,t)$.
rq : Une ligne de courant (définie à t donné) n'est pas forcément confondue avec une trajectoire de particule (définie au cours du temps) !
def : Un **tube de courant** est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé. C'est une sorte de « canalisation fictive » dont les particules rentrent par un côté et ressortent par l'autre, sans jamais sortir par la paroi latérale.

2. CE : Définir et utiliser l'approche eulérienne.

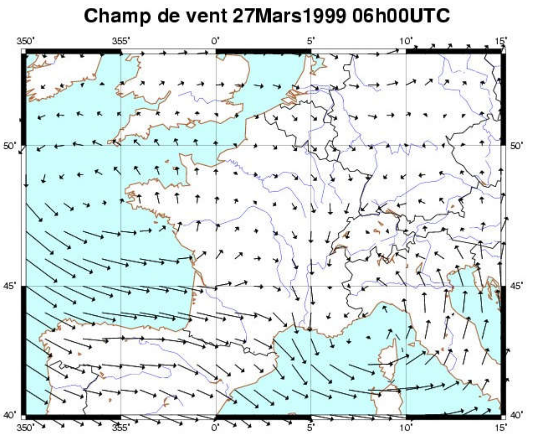


FIGURE 7 – Exemple de champ des vitesses.

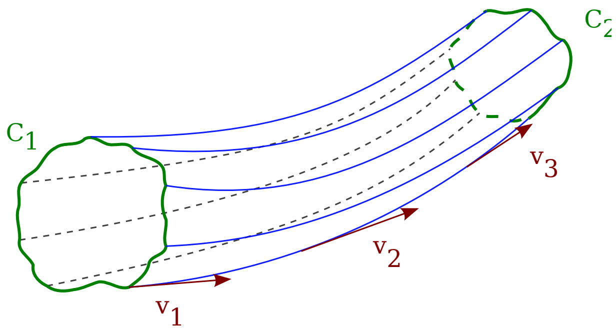


FIGURE 8 – Tube de courant appuyé sur C_1.

1.4 Écoulement stationnaire

def : Un écoulement est **stationnaire** si tous les champs eulériens ($\vec{v}(M,t)$, $\mu(M,t)$, etc) ne dépendent pas de t.
prop : Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel[3].

ex : Vu d'un surfeur suivant une vague non déferlante, l'écoulement semble stationnaire autour de lui : il peut rester notamment à hauteur fixe. Mais vu du rivage, la hauteur d'eau en chaque point évolue dans le temps.

2 Caractère incompressible d'un écoulement

2.1 Masse volumique

def : La **masse volumique** μ d'une particule fluide de masse dm et volume dV est $\boxed{\mu = \dfrac{dm}{dV}}$. Elle est aussi souvent notée ρ (lettre grecque « rho ») mais il y a alors risque de confusion avec la pression p (lettre latine).

2.2 Dérivée particulaire de la masse volumique

On considère une particule de fluide repérée par son vecteur-position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ à l'instant t. Alors sa masse volumique s'écrit $\mu(\vec{r},t)$. Cherchons à exprimer la variation de sa masse volumique pendant une durée dt. Pendant cette durée, elle s'est déplacée de $\overrightarrow{dr} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$.
def : La **dérivée particulaire de la masse volumique** est définie par :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\mu(\vec{r}+\overrightarrow{dr}, t+dt) - \mu(\vec{r},t)}{dt} \qquad \rightarrow \text{on suit l'évolution d'une particule} \tag{1}$$

rq : On peut aussi utiliser un « d » droit minuscule à la place du D. Mais on préfère éviter les confusions dans ce chapitre avec les dérivées partielles « ∂ » :

$$\frac{D\mu}{Dt} \neq \frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\mu(\vec{r}, t+dt) - \mu(\vec{r},t)}{dt} \qquad \rightarrow \text{on suit l'évolution en un point fixe} \tag{2}$$

prop : La **dérivée particulaire de la masse volumique** s'écrit[4] :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}(\mu)} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + v_x\frac{\partial\mu}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mu}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mu}{\partial z} \quad \text{en cartésien} \tag{3}$$

| démo exigible : *La relation 3 est à savoir démontrer.*

interprétation des termes :

⋆ $\partial\mu/\partial t$ exprime la **variation temporelle locale** de μ en un point donné. Terme nul en régime stationnaire.

⋆ $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}(\mu)$ exprime une **variation quand la particule se déplace vers μ différent** (convection). Il est appelé « **terme convectif** ». Terme nul si la particule est immobile ($\vec{v} = \vec{0}$), ou si μ est homogène ($\overrightarrow{\text{grad}}(\mu) = \vec{0}$).

3. CE : Savoir que le caractère stationnaire dépend du référentiel.
4. CE : Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique.

| schéma : *Proposer un écoulement stationnaire de dérivée particulaire de μ non nulle.*

2.3 Conservation de la masse

La masse est une grandeur qui se conserve [5]. Cela se traduit par une équation locale [6], similaire à celles vues pour la conservation de particules, de charges, d'énergie, etc.

prop : **Équation de conservation de la masse**, avec dérivée locale :

$$\boxed{\operatorname{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0} \qquad (4)$$

prop : La **densité de courant de masse** est $\boxed{\vec{j_m} = \mu\vec{v}}$, en kg.m^{-2}.s^{-1}.

prop : Le **débit massique** à travers une surface S est $\boxed{D_m = \iint_S \vec{j_m}.\vec{dS} = \iint_S \mu\vec{v}.\vec{dS}}$, en kg.s^{-1}.

| démo de cours : *Démontrer l'équation de conservation de la masse en géométrie unidimensionnelle.*

2.4 Conservation de la masse en fonction de la dérivée particulaire

prop : **Équation de conservation de la masse**, avec dérivée particulaire :

$$\boxed{\mu \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{D\mu}{Dt} = 0} \qquad (5)$$

| démo de cours : *À partir de l'équation de conservation de la masse sous forme usuelle, démontrer son expression en fonction de la dérivée particulaire. On donne* $\operatorname{div}\left(f\vec{A}\right) = f\operatorname{div}\left(\vec{A}\right) + \vec{v}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$.

2.5 Caractérisation d'un écoulement incompressible

def : Un écoulement est dit **incompressible** si le volume de chaque particule de fluide reste constant au cours du temps, donc si $\frac{D\mu}{Dt} = 0$. Cette propriété ne dépend pas du référentiel.
prop : Un écoulement incompressible est caractérisé par la relation [7] :

$$\boxed{\textbf{écoulement incompressible} : \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = 0} \qquad (6)$$

| démo : *Découle directement de la conservation de la masse en fonction de la dérivée particulaire.*

prop : En général, aucun fluide n'est parfaitement incompressible. **Mais ce modèle marche bien pour les liquides, ainsi que pour les gaz à des vitesses faibles devant la vitesse du son** (cf futur chapitre *Physique des Ondes*).

| schéma : *Exemples d'écoulement compressible et d'écoulement incompressible.*

prop : Pour un **écoulement incompressible**, trois caractérisations équivalentes :
⋆ en tout point : $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$,
⋆ pour une surface fermée quelconque : flux entrant = flux sortant (pour le champ $\vec{v}$),
⋆ pour une surface fermée quelconque : flux algébrique sortant = 0 (pour le champ $\vec{v}$).
On dit que le flux de vitesse est un **flux conservatif**.

prop : La **densité de courant de volume** est $\boxed{\vec{j_V} = \vec{v}}$, en m.s^{-1}.

prop : Le **débit volumique** à travers une surface S est $\boxed{D_V = \iint_S \vec{j_V}.\vec{dS} = \iint_S \vec{v}.\vec{dS}}$, en m^3.s^{-1}.

5. Ce n'est pas toujours vrai, notamment en ce qui concerne les réactions nucléaires où de la masse peut être convertie en énergie ($E = mc^2$). Mais ces effets sont négligeables dans les phénomènes au programme de PC.
6. CE : Établir les équations de conservation de la masse dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne.
7. CE : Utiliser $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ pour caractériser un écoulement incompressible.

2.6 Généralisation : théorème de Green-Ostrogradsky

Dans la démonstration de cours partie 2.3, on avait obtenu :

⋆ flux de masse sortant algébrique de dV pendant dt : $\delta m_{\text{sortant}}/dt = j_m(x+dx,t)S - j_m(x,t)S$ en cas unidimensionnel selon $\overrightarrow{u_x}$. En généralisant à 3 dimensions :

def : Considérons le champ de vecteur $\overrightarrow{j}(M,t)$. Soit une surface fermée S (qui délimite donc un volume V). Alors le flux sortant à travers une surface fermée S est noté :

$$\Phi_{\text{sortant}}(t) = \oiint_{M\in S} \overrightarrow{j}(M,t).\overrightarrow{dS} \tag{7}$$

Le cercle sur le symbole intégrale indique que S est une surface fermée et que $\overrightarrow{dS}$ est vers l'extérieur.

⋆ variation algébrique de masse dm pendant dt : $dm = \frac{\partial \mu}{\partial t} dV dt = -\frac{\partial j_m}{\partial x}.dV.dt$ en cas unidimensionnel selon $\overrightarrow{u_x}$. En généralisant à 3 dimensions :

prop : Considérons le champ de vecteur $\overrightarrow{j_m}(M,t)$. Soit une surface fermée S (qui délimite donc un volume V). Alors la variation temporelle de masse dans le volume V s'écrit :

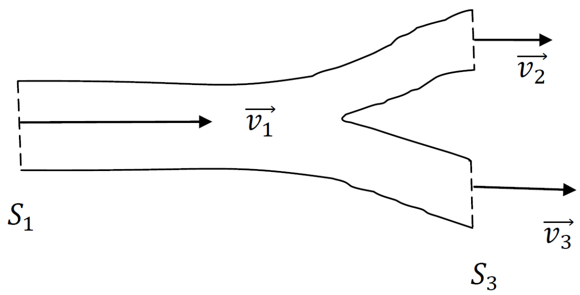
$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{M\in V} \frac{\partial \mu}{\partial t}(M,t).dV = -\iiint_{M\in V} \text{div}\left(\overrightarrow{j}(M,t)\right).dV \tag{8}$$

prop : Pour un champ de vecteur $\overrightarrow{j}$ **théorème de (Green)-Ostrogradsky** :

$$\underbrace{\oiint_{M\in S} \overrightarrow{j}(M,t).\overrightarrow{dS}}_{\text{flux sortant}} = \underbrace{\iiint_{M\in V} \text{div}\left(\overrightarrow{j}(M,t)\right).dV}_{-dm_{\text{int}}/dt}$$

2.7 Loi des nœuds

prop : Pour un **écoulement incompressible**, $\oiint_S \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} = 0$. On retrouve une relation de type « loi des nœuds » le long des tubes de courants sur le flux de vitesse : $v_1 S_1 = v_2 S_2 + v_3 S_3$:



prop : Pour un **écoulement stationnaire**, $\oiint_S \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} = 0$. On retrouve une relation de type « loi des nœuds » le long des tubes de courants sur le flux de vitesse × masse volumique : $\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2 + \mu_3 v_3 S_3$.

analogie : D'autres exemples de flux conservatifs qui vérifient donc aussi une relation de type loi des nœuds : $\overrightarrow{j_N}$ et $\overrightarrow{j_Q}$ en régime stationnaire (chapitres T2 et T3), densité de courant électrique $\overrightarrow{j}$ (chapitre E1), $\overrightarrow{E}$ dans une zone de charge neutre (chapitre E2), $\overrightarrow{B}$ (chapitre E3).

3 Approche eulérienne de l'accélération

3.1 Dérivée particulaire de la vitesse

def : Dans une approche lagrangienne où on suit une particule de fluide (comme en méca usuelle), son accélération est la dérivée particulaire de la vitesse : $\boxed{\overrightarrow{a} = D\overrightarrow{v}/Dt}$. On peut donc l'exprimer en fonction du champ eulérien des vitesses [8] :

$$\boxed{\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}} \tag{9}$$

8. CE : Connaître et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$.

démo de cours : *Établir que la composante $a_x = Dv_x/Dt = \partial v_x/\partial t + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}(v_x)$. Généraliser pour les autres composantes.*

def : Soient deux champs de vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. En base cartésienne, l'opérateur $\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{b}$ s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{\text{grad}}(b_x) \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{\text{grad}}(b_y) \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{\text{grad}}(b_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x.\dfrac{\partial b_x}{\partial x} + a_y.\dfrac{\partial b_x}{\partial y} + a_z.\dfrac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_x.\dfrac{\partial b_y}{\partial x} + a_y.\dfrac{\partial b_y}{\partial y} + a_z.\dfrac{\partial b_y}{\partial z} \\ a_x.\dfrac{\partial b_z}{\partial x} + a_y.\dfrac{\partial b_z}{\partial y} + a_z.\dfrac{\partial b_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3.2 Terme local

def : Le terme $\partial\overrightarrow{v}/\partial t$ est appelé « **terme local** ». C'est la variation de vitesse en un point M donné.
prop : Pour un écoulement stationnaire, l'accélération locale est nulle en tout point.

3.3 Terme convectif

def : Le terme $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$ est appelé « **terme convectif** » (vient de convection : écoulement de fluide). Ce terme est dû au déplacement de particules de fluide vers des zones où le champ de vitesse est plus intense.

schéma : *Exemples d'écoulements d'accélération convective nulle : champ homogène ; écoulement de Poiseuille.*

schéma : *Exemples d'écoulements d'accélération convective non nulle : champ inhomogène dans le sens de $\overrightarrow{v}$; tourbillon.*

formule non exigible à savoir utiliser :

$$\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right)\wedge\overrightarrow{v} \tag{10}$$

Le terme $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)$ pointe vers l'augmentation de la norme du champ $\overrightarrow{v}$, le terme avec $\overrightarrow{\text{rot}}$ est relié à la rotation du champ $\overrightarrow{v}$.

4 Caractère rotationnel d'un écoulement

Comment quantifier à quel point le champ de vitesse « tourne » ? On va introduire les notions de circulation d'un vecteur et l'opérateur **rotationnel**.

4.1 Circulation du champ de vitesse

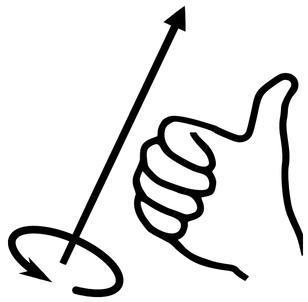
prop : Considérons une courbe orientée $\mathcal{C}$ de A vers B. La circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{v}$ le long de $\mathcal{C}$ s'écrit : $\boxed{\int_A^B \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dl}}$.

schéma : *Exemples de circulation dans différents champs, notamment un champ homogène et un champ en rotation autour d'un axe.*

interprétation de la circulation : La circulation d'un champ de vecteurs sur une courbe indique à quel point ce champ « suit la courbe ».

def : Une courbe est un **contour fermé** si cette courbe se boucle sur elle-même. Elle englobe complètement une surface.
def : La **circulation** d'un champ de vecteur $\overrightarrow{v}$ sur un contour fermé orienté $\mathcal{C}$ s'écrit $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dl}$.

rappel : *Orientation relative d'un contour fermé et de la surface enlacée.*



interprétation de la circulation sur un contour fermé : La circulation d'un champ de vecteurs sur un contour fermé indique à quel point le champ de vecteurs « tourne autour d'un axe ». Ainsi, la circulation d'un champ homogène sur un contour fermé est nulle.

4.2 Opérateur rotationnel

La circulation évalue de manière globale la rotation d'un champ autour d'un axe, son calcul nécessite la valeur du champ en plusieurs points. Il existe un opérateur vectoriel qui évalue localement en un point donné cette propriété, l'opérateur **rotationnel**.

def : L'opérateur **rotationnel** du champ de vecteur $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en base cartésienne s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right).\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right).\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).\overrightarrow{u_z}$$

⋆ Application de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, différent de $\overrightarrow{\text{grad}}$ et div !
⋆ Expression en cordonnées cartésiennes à connaître. Savoir utiliser les expressions fournies en cordonnées cylindriques ou sphériques.

ex1 : *Que vaut le rotationnel d'un champ homogène ?*
ex2 : *Que vaut le rotationnel du champ de vitesse* $\overrightarrow{v}(M) = \alpha.x.\overrightarrow{u_x}$ *? Et pour* $\overrightarrow{v}(M) = \alpha.y.\overrightarrow{u_x}$ *?*
ex3 : *Que vaut le rotationnel du champ électrique* $\overrightarrow{E}$ *créé par une charge ponctuelle à distance* $r \neq 0$ ($\overrightarrow{E} = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)\overrightarrow{u_r}$) *? On donne l'expression de l'opérateur en base sphérique :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta.a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right).\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\right).\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right).\overrightarrow{u_\varphi}$$

4.3 Théorème de Stokes : lien entre circulation et rotationnel

prop : Considérons un contour orienté $\mathcal{C}$ s'appuyant sur la surface orientée S. Le **théorème de Stokes** pour un champ de vecteur $\overrightarrow{a}$ s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{a}).\overrightarrow{dS}$$

4.4 Vecteur tourbillon

def : On appelle **vecteur tourbillon** $\boxed{\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}}$.

prop : Comment trouver le champ de vitesses $\overrightarrow{v}$ si on connaît $\overrightarrow{\Omega}$? Par le théorème de Stokes, considérons un contour $\mathcal{C}$ orienté englobant une surface S :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} = 2\iint_S \overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{dS} \qquad (11)$$

rq : analogie avec théorème d'Ampère $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \mu_0\,\overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$, cf chapitre *E3-Magnétostatique*.

<u>exo d'illustration de $\overrightarrow{\Omega}$</u> : *On considère un écoulement dont le vecteur tourbillon vérifie :*

$$\overrightarrow{\Omega} = \begin{cases} \Omega_0 \overrightarrow{u_z} & \text{pour} \quad r \leq a \\ \overrightarrow{0} & \text{pour} \quad r > a \end{cases}$$

On suppose $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$. Déterminer le champ des vitesses. Effectuer une analogie avec la magnétostatique (après chapitre E3).

4.5 Écoulement irrotationnel

<u>def</u> : Un écoulement est dit « **irrotationnel** » si le champ de vitesse vérifie en tout point $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Le caractère irrotationnel d'un écoulement dépend du référentiel, contrairement à son caractère incompressible [9].
<u>prop</u> : Pour un écoulement irrotationnel, il existe un potentiel des vitesse ϕ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$.
<u>def</u> : On appelle « **équipotentielle** » une surface où le potentiel ϕ est constant.
<u>prop</u> : Les surfaces équipotentielles sont orthogonales au gradient de potentiel.

<u>analogie</u> : Le champ des vitesses d'un écoulement irrotationnel est analogue au champ électrostatique ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$), cf *E2-Électrostatique.*

<u>exo</u> : *Tracer l'allure des équipotentielles pour le cas ci-dessous d'écoulement irrotationnel autour d'un cylindre.*

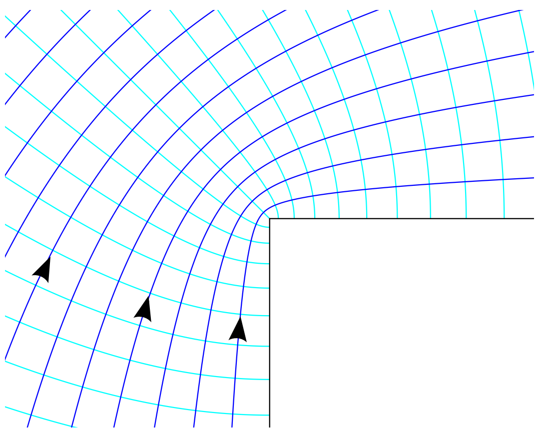


FIGURE 9 – Écoulement irrotationnel près d'une arête : lignes de courant (foncé), équipotentielles (clair).

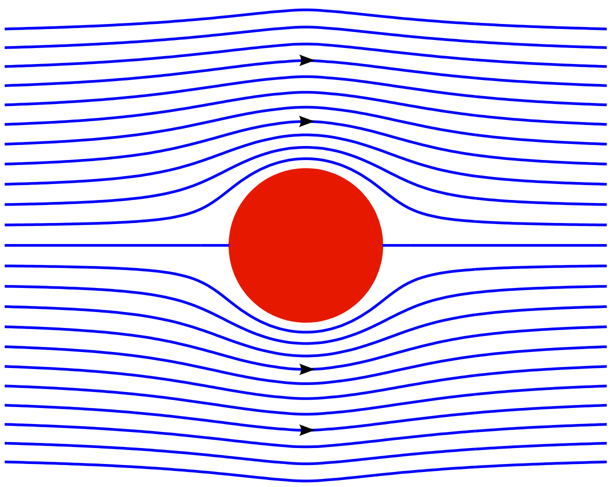


FIGURE 10 – Écoulement irrotationnel atour d'un cylindre.

4.6 Compositions d'opérateurs vectoriels

<u>prop</u> : Pour tout champ scalaire f : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\right) = \overrightarrow{0}}$. **Un gradient est toujours de rotationnel nul.**

<u>ex</u> : Cette relation est compatible avec les lois de l'électrostatique : $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{0}$. De même pour un écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

<u>prop</u> : Pour tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$: $\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = 0}$. **Un rotationnel est toujours de divergence nulle.**

<u>ex</u> : Cette relation est compatible avec les lois de la magnétostatique : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{B}\right) = \mu_0\,\overrightarrow{j}$ et $\text{div}\left(\overrightarrow{j}\right) = 0$ (loi des noeuds, cf chapitre E1).

<u>prop</u> : Pour tout couple de champs vectoriels $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$: $\text{div}\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}$.
<u>ex</u> : Cette relation est notamment utilisée pour démontrer l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique à partir des équations de Maxwell (chapitre E4).

9. CE : Utiliser $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ pour un écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses

prop : Pour tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$: $\left(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{A}^2\right) + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}\right)\wedge\overrightarrow{A}$.

ex : Cette relation est utilisée en Mécanique des Fluides pour développer l'accélération convective $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$.

5 Interprétation de l'évolution de la forme d'une particule de fluide

⋆ Pour un écoulement incompressible : $\text{div}\overrightarrow{v} = 0$, masse volumique et volume d'une particule sont constants.
⋆ Pour un écoulement irrotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, la particule de fluide ne tourne pas.

exo : *Pour chacun des deux écoulements stationnaires suivants, une particule de fluide a été dessinée à trois instants différents. Déterminer si les écoulements sont incompressibles ou irrotationnels. Effectuer une analogie avec des champs électromagnétiques statiques (après avoir vu les chapitres E2 et E3).*