

MF3 : Équations dynamiques locales

On a indépendamment décrit :

- ★ d'une part chapitre MF1, la « cinématique des fluides », c'est-à-dire la description d'un écoulement, et en particulier l'accélération particulaire,
 - ★ d'autre part chapitre MF2, les forces de contact dans les fluides.
- Relions ces deux aspects par le principe fondamental de la dynamique des fluides : **l'équation de Navier-Stokes**.

1 Équation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien incompressible

1.1 Équation de Navier-Stokes

Considérons une particule de fluide de volume dV et masse volumique μ dans un référentiel donné. On considère le fluide newtonien et l'écoulement incompressible dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. La particule subit les actions mécaniques :

- ★ forces de pressions $\vec{dF}_p = (-\vec{\text{grad}}(p)) dV$,
- ★ poids $\vec{dP} = dm \cdot \vec{g} = (\mu \cdot dV) \vec{g}$,
- ★ forces de viscosité $\vec{dF}_v = (\eta \Delta \vec{v}) dV$ (valable seulement pour un fluide newtonien en écoulement incompressible),
- ★ et éventuellement d'autres forces qu'on exprime en terme de forces volumiques $\vec{f}$: $\vec{dF} = \vec{f} dV$.

Appliquons le PFD à cette particule de fluide :

$$(\mu \cdot dV) \frac{D\vec{v}}{Dt} = (-\vec{\text{grad}}(p)) dV + (\mu \cdot dV) \vec{g} + (\eta \Delta \vec{v}) dV (+ \vec{f} dV) \quad (1)$$

En simplifiant par dV , et en utilisant $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$, on obtient l'équation de Navier-Stokes¹.

prop : Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\vec{\text{grad}}(p) + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} (+ \vec{f}) \quad (2)$$

C'est l'équation fondamentale de la mécanique des fluides.

rq : Le terme non-linéaire en $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$ est responsable de la difficulté pour résoudre analytiquement cette équation dans le cas général. Ces non-linéarité permettent d'expliquer la grande variété des écoulements possibles.

rq : Parmi les forces volumiques supplémentaires $\vec{f}$, on peut par exemple citer :

★ cf *chapitre MF0* : les forces volumiques d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -\mu \vec{a}_e$ et $\vec{f}_{ic} = -2\mu \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}$ où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur rotation du référentiel d'étude par rapport à un référentiel galiléen.

★ plus rarement, la densité volumique de force de Lorentz pour un fluide chargé : $\rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ où ρ est la densité volumique de charge électrique.

1.2 Statique des fluides

prop : En régime statique $\vec{v}(M) = \vec{0} \forall M$, on retrouve l'équation de la statique des fluides :

$$\vec{0} = -\vec{\text{grad}}(p) + \mu \vec{g} (+ \vec{f}) \quad (3)$$

1.3 Rappel sur le nombre de Reynolds

Deux termes de l'équation de Navier-Stokes font intervenir le champ de vitesse $\vec{v}$: l'accélération convective, et les forces de viscosité (effets de diffusion). Le nombre de Reynolds permet de comparer² ces deux termes en ordre de grandeur.

1. CE : Connaître et utiliser l'expression de l'équation de Navier-Stokes dans un écoulement newtonien incompressible.

2. CE : Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.

def : Le **nombre de Reynolds** Re est défini par :

$$Re = \frac{\text{effets de convection}}{\text{effets de viscosité}} = \frac{\mu L v}{\eta} = \frac{L v}{\nu} \quad (4)$$

avec la masse volumique μ , L la longueur caractéristique des obstacles, v la vitesse de l'écoulement loin de l'obstacle, η la viscosité dynamique, $\nu = \eta/\mu$ la viscosité cinématique.

démo : Justifier l'expression du nombre de Reynolds à partir de la comparaison de l'accélération convective et des effets de viscosité.

unité : C'est un nombre sans dimension.

ODG :

écoulement	manteau terrestre	glacier	bactéries dans l'eau	bille dans du miel	nageur dans l'eau	oiseau dans l'air
Re	10^{-20}	10^{-11}	10^{-5}	10^{-2}	10^5	10^6

2 Écoulement à faible nombre de Reynolds

2.1 Équation de diffusion

Pour $Re \ll 1$ (fluide très visqueux ou écoulement très lent ou obstacles très petits), on peut négliger l'accélération convective devant les effets de viscosité. L'équation de Navier-Stokes devient, en négligeant les forces autres que la viscosité :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v} \quad (5)$$

prop : Contrairement à Navier-Stokes, c'est une équation aux dérivées partielles linéaire. Il y a donc unicité de la solution une fois connues les conditions aux limites.

prop : On reconnaît une équation de diffusion : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \Delta \vec{v}$.

analogie : Par exemple en diffusion de particules $\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$.

coefficient de diffusion : On peut définir un **coefficient de diffusion** pour la viscosité $\nu = \frac{\eta}{\mu}$, appelé viscosité cinématique, en $m^2.s^{-1}$.

ODG de ν : L'agitation thermique est la cause physique de tous les phénomènes de diffusion, donc la viscosité cinématique ν , le coefficient de diffusion de particules D , et la diffusivité thermique $\lambda/(\rho c)$ ont même unité et ordre de grandeur :

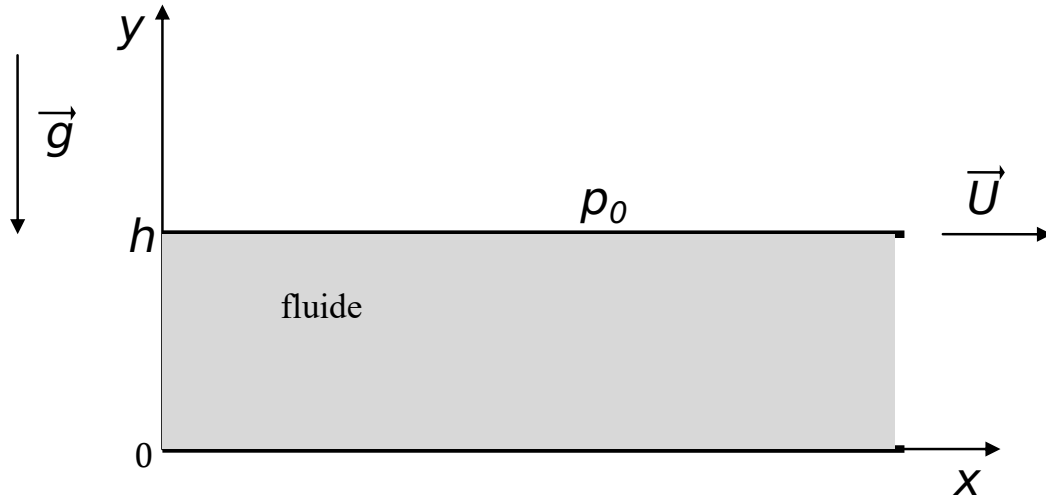
grandeur	coefficient de diffusion	diffusivité thermique	viscosité cinématique
système	O ₂ dans l'air	air	air
valeur en $m^2.s^{-1}$	2.10^{-5}	2.10^{-5}	$1,5.10^{-5}$

prop : La durée typique τ d'un régime transitoire d'un écoulement visqueux sur une distance L vérifie : $\nu = \eta/\rho = L^2/\tau$.

schéma : Analogie entre des solutions en régime transitoire de l'équation de diffusion thermique, et de l'équation de Navier-Stokes à faible Re .

2.2 Exo-type : écoulement de Couette plan

On considère un écoulement entre deux plaques planes horizontales et distantes de h . La plaque inférieure est immobile et la plaque supérieure est animée d'une vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ constante. On se place dans le cas d'un écoulement stationnaire et incompressible. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_y$. La pression au niveau de la plaque supérieure vaut p_0 . On considère le système invariant selon $\vec{u}_z$. Le champ de vitesse stationnaire est donc de la forme $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y$.



1. On suppose les plaques suffisamment longues pour pouvoir les considérer infinies. Qu'en déduire de plus sur les invariances ?
2. Sachant que l'écoulement est incompressible, simplifier encore le champ de vitesse pour obtenir $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$.
3. Écrire l'équation de Navier-Stokes et exprimer chaque terme.
4. Déduire le champ de pression $p(y) = p_0 + \mu g(h - y)$.
5. Déduire le champ de vitesse $v_x(y) = Uy/h$.
6. Qualitativement, tracer l'allure du champ de vitesse à différents instants lors du régime transitoire où le fluide est initialement immobile.
7. En déduire la force appliquée par le fluide sur la plaque supérieure de surface S : $\vec{F} = -\eta \frac{US}{h} \vec{u}_x$.
8. En effectuant un bilan de puissance sur une particule de fluide, montrer que la puissance volumique dissipée dans le fluide s'écrit $\mathcal{P}_V = \eta U^2/h^2$.

2.3 Exo-type : écoulement de Poiseuille cylindrique

L'objectif est de mesurer la viscosité de l'eau η . Cette mesure est plus difficile que pour un fluide plus visqueux. On dispose d'un tuyau fin horizontal de rayon $R = 2$ mm. L'entrée est reliée à un large réservoir dont la hauteur d'eau définit la pression à l'entrée du tuyau. On recueille le fluide s'écoulant à l'autre extrémité pour mesure le débit Q . Le tuyau présente deux ouvertures au niveau des points A (en amont) et B loin des extrémités. Deux très petits tubes verticaux permettent d'y lire la différence de pression $\Delta p = p_A - p_B > 0$. On donne la distance $AB = L = 1,2$ m.

Pour une différence de hauteur d'eau dans les tubes verticaux de $\Delta h_1 = 25$ mm, on mesure en régime stationnaire un débit $Q_1 = 1,35 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Et pour $\Delta h_2 = 48$ mm, on mesure $Q_2 = 3,31 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

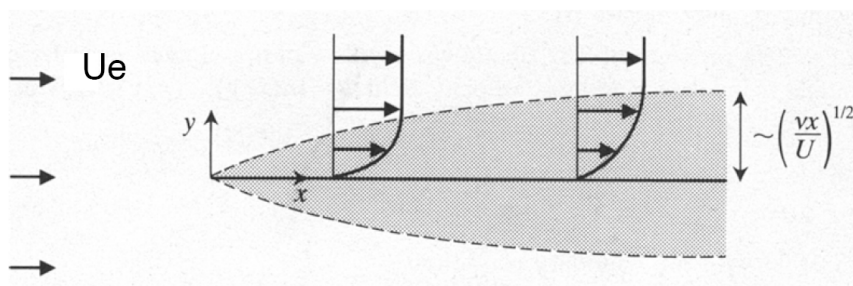
On considère l'écoulement incompressible et newtonien et on néglige l'influence de la pesanteur sur l'écoulement. En base cylindrique, on donne $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$ et le laplacien : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

1. En prenant z le long de l'axe du tuyau, on admet que le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v_z(r) \vec{u}_z$. Calculer $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$.
2. En pratique, on remarque que l'écoulement est laminaire pour un nombre de Reynolds inférieur à 1800. On donne la valeur tabulée attendue pour l'eau à 23°C : $\eta_{\text{tab}} = 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Vérifier que l'écoulement est bien laminaire.
3. À partir de l'équation de Navier-Stokes, déterminer que la pression suit une loi affine en z entre A et B.
4. Démontrer que le champ de vitesse est $v(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$.
5. Démontrer que le débit volumique est $Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p$. Effectuer une analogie avec un autre domaine de la physique.
6. En déduire deux valeurs de mesures de la viscosité de l'eau. Commenter.

3 De l'écoulement visqueux à l'écoulement parfait : vers l'équation d'Euler

3.1 Notion de couche limite

Considérons un écoulement laminaire horizontal arrivant sur un obstacle plan horizontal, cf figure. Au contact du bord de l'obstacle, les effets de viscosité freinent le fluide. Plus l'écoulement avance le long de l'obstacle, plus son écoulement est perturbé sur une plus grande épaisseur.



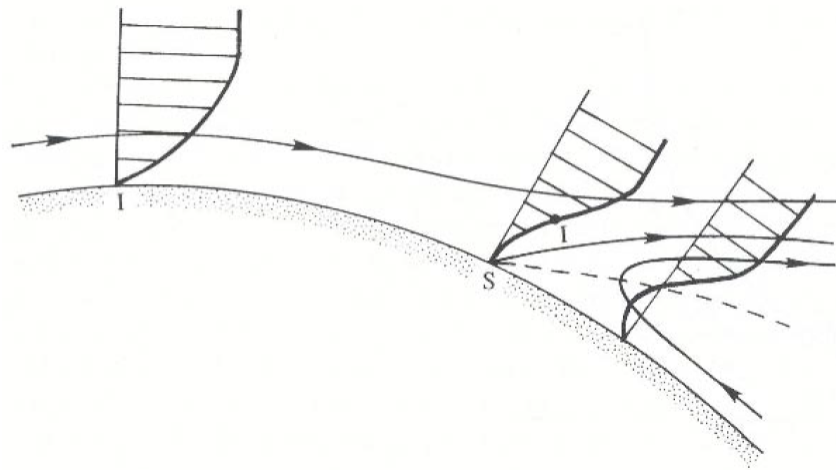
def : On appelle « **couche limite** » la zone où le champ de vitesse subit les effets de viscosité sur la paroi. Son épaisseur croît au court de l'écoulement le long de la paroi.

exo : En interprétant le champ de vitesse dans la couche limite en terme de diffusion, montrer qu'en ordre de grandeur, la couche limite pour un écoulement selon x à vitesse v est d'épaisseur $e \simeq \sqrt{\nu x / v}$.

ODG : Considérons une aile d'avion de longueur $L = 5$ m volant à $U = 75$ m/s dans l'air de viscosité cinématique $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer Re et l'épaisseur de la couche limite.

exo : Proposer une valeur minimale pour l'expression « loin des extrémités » dans l'expérience de la partie 2.3.

rq : Même si la couche limite est parfois très fine, elle a un rôle essentiel dans l'écoulement. En effet, les actions mécanique du fluide sur la paroi (traînée, portance) ont lieu dans cette couche. En particulier, le décollement de la couche limite produit une forte traînée, c'est pourquoi un objet mieux profilé a un C_x plus faible.



3.2 Approximation de l'écoulement parfait

En dehors de la couche limite, les effets de viscosité sur les parois sont négligeables. Tout se passe comme si l'écoulement était à $Re \rightarrow +\infty$.

def : On appelle **fluide parfait** un fluide sans aucune dissipation. En particulier, les phénomènes de diffusion sont négligés. Donc pour un fluide parfait : $\eta = 0$, et l'écoulement est sans transfert thermique.

Ce modèle ne peut pas être valable dans la couche limite. Mais comme celle-ci peut être très fine, on peut souvent décrire une large part de l'écoulement par le modèle du fluide parfait.

prop : **Condition aux limites pour un écoulement parfait.** Dans la limite d'un écoulement parfait où on néglige la couche limite, la vitesse d'un fluide le long d'une paroi n'est pas forcément nulle.

3.3 Équation d'Euler

prop : Pour un écoulement parfait, le champ de vitesse est régi par l'équation d'Euler :

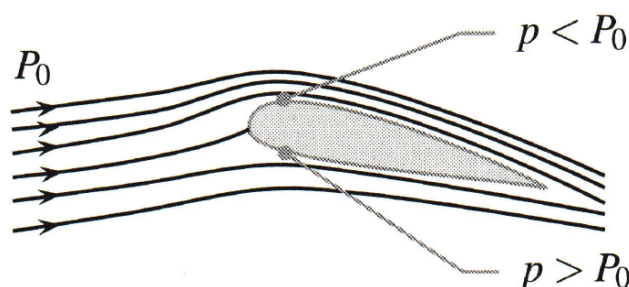
$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \mu \vec{g} \quad (6)$$

rq : On peut l'obtenir en appliquant $\eta = 0$ dans l'équation de Navier-Stokes. Mais l'équation d'Euler est aussi valable pour des écoulements parfaits non incompressibles.

prop : L'écoulement d'un fluide parfait est adiabatique (transferts thermiques négligés). De plus, on peut montrer que l'équation d'Euler est réversible. Ainsi, l'évolution d'une particule de fluide parfait est **isentropique**. On utilisera ce résultat lors de l'étude de la propagation des ondes acoustiques chapitre *PO1-Propagation non dispersive des ondes*.

3.4 Interprétation de la courbure des lignes de courant

prop : Pour un écoulement parfait, la pression augmente du centre de courbure vers la périphérie extérieure (si les effets des autres forces sont négligeables).

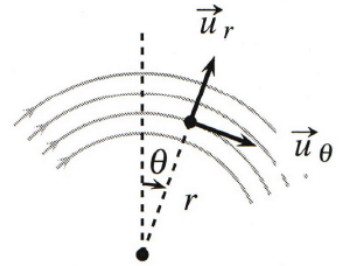


applications : Cette propriété permet une interprétation simplifiée de la portance d'une aile. Elle permet aussi d'expliquer une conséquence de l'effet Coanda (déviation d'un écoulement par un solide convexe) : la lévitation d'une balle de ping-pong piégée sous le jet d'un sèche-cheveux³.

exo : Exercice peu essentiel qui permet de justifier la propriété précédente dans un cas particulier.

Considérons un écoulement non rectiligne. Localement, des lignes de courants courbes peuvent être assimilées à des cercles, cf figure. Supposons l'écoulement stationnaire, et les forces volumiques autres que pression sont négligeables. Le champ de vitesse s'écrit : $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$. En base cylindrique, $\vec{\text{grad}} = (\partial/\partial r, (1/r)\partial/\partial\theta, \partial/\partial z)$.

1. Calculer l'expression de l'opérateur $\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}$. Montrer alors que l'accélération convective vaut $-(v^2(r)/r)\vec{u}_r$. On rappelle $\partial\vec{u}_\theta/\partial\theta = -\vec{u}_r$.
2. En appliquant l'équation d'Euler, montrer que $\partial p/\partial r > 0$.



3.5 Exo : oscillation dans un tube en U

Préambule : une propriété du gradient

prop : Propriété du gradient d'un champ scalaire f :

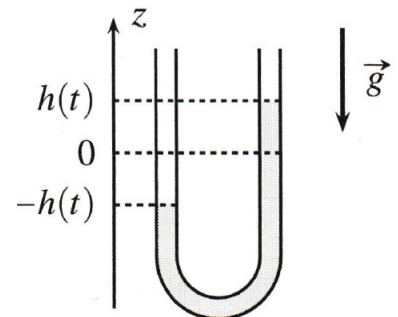
$$df = \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{\ell} \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \text{ en cartésien} \right)$$

$$f(B) - f(A) = \int_A^B \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{\ell}$$

démo : Calculer $df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$.

Énoncé de l'exo

Un tube en U de section S contient un liquide de masse volumique μ . Le volume total est $V = SL$. On définit $h(t)$ comme la différence entre la hauteur $z(t)$ du tube de droite et la hauteur $z = 0$ à l'équilibre. La section du tube est suffisamment faible pour considérer que toutes les lignes de courant sont de longueur L . On considère le fluide comme parfait. Intégrer l'équation d'Euler sur une ligne de courant pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$. On donne $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$.



3. Cf vidéo <https://youtu.be/WWHXTumy4RQ>.

4 Relation de Bernoulli

4.1 Principe de la relation de Bernoulli

L'équation d'Euler est une équation aux dérivées partielles décrivant un écoulement sans dissipation. Son intégration, si elle est possible et à l'aide d'éventuelles équations supplémentaires, donne les champs de vitesse et de pression.

Par analogie avec la mécanique usuelle, un écoulement sans dissipation vérifie aussi une équation du type « conservation de l'énergie mécanique ». On rappelle qu'en mécanique, la conservation de l'énergie entre deux états est très pratique pour exprimer la relation entre deux états d'un système sans avoir à intégrer d'équation différentielle. En mécanique des fluides, la relation de Bernoulli joue ce rôle.

Il existe plusieurs variantes des relations de Bernoulli⁴. Dans le cadre du programme, on se limite à un écoulement :

- ★ parfait : pas de dissipation donc ni viscosité ($\eta = 0$), ni transfert thermique,
- ★ stationnaire : $\partial \vec{v} / \partial t = \vec{0}$,
- ★ incompressible et homogène : masse volumique constante et uniforme $\mu(\vec{r}, t) = \mu = \text{cte}$,
- ★ dans $\vec{g}$ uniforme en référentiel galiléen : pas de forces d'inertie autres que celle déjà dans $\vec{g}$,
- ★ sans autres forces que celles de pression et pesanteur.

Pour un fluide parfait, on peut écrire l'équation d'Euler :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \mu \vec{g} \quad (7)$$

4.2 Expression de la relation de Bernoulli

prop : Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, d'un fluide homogène dans le champ $\vec{g}$ homogène, la **relation de Bernoulli** s'écrit entre deux points A et B le long d'une même ligne de courant :

$$p_A + \mu \frac{v_A^2}{2} + \mu g z_A = p_B + \mu \frac{v_B^2}{2} + \mu g z_B \quad (8)$$

démo de relation de Bernoulli : Démontrer cette relation de Bernoulli à partir de l'équation d'Euler. On donne $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(v^2/2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$.

unité : chaque terme est homogène à une énergie par unité de volume.

interprétation : conservation de l'énergie mécanique volumique en tout point de l'écoulement :

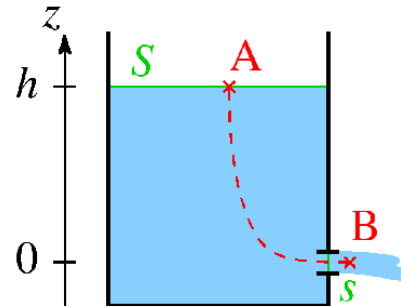
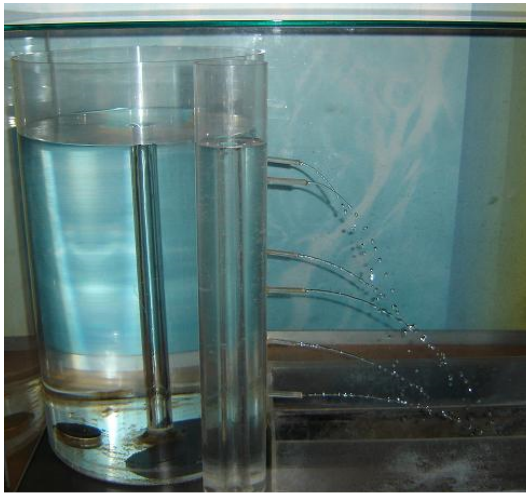
- ★ $\mu g z$ est l'énergie potentielle de pesanteur par unité de volume,
- ★ $\mu v^2/2$ est l'énergie cinétique par unité de volume,
- ★ p s'interprète alors comme une énergie potentielle volumique associée aux forces de pression : sans autre contrainte, un fluide tend à se diriger vers p minimale.

rq : La valeur de $p + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z$ est constante sur une ligne de courant donnée. Mais elle peut être différente pour deux lignes différentes ! Dans le cas particulier d'un écoulement irrotationnel, on peut montrer que cette valeur serait la même pour chaque ligne.

4. CE : Établir et utiliser la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.

4.3 Exo-type : vidange d'un réservoir

On s'intéresse à la vidange d'un réservoir par une petite ouverture. Expérimentalement, on constate que plus cette ouverture est basse, plus le débit est important. On cherche alors à modéliser ce phénomène, et notamment estimer la vitesse de l'écoulement dans l'ouverture, ainsi que la durée de vidange.

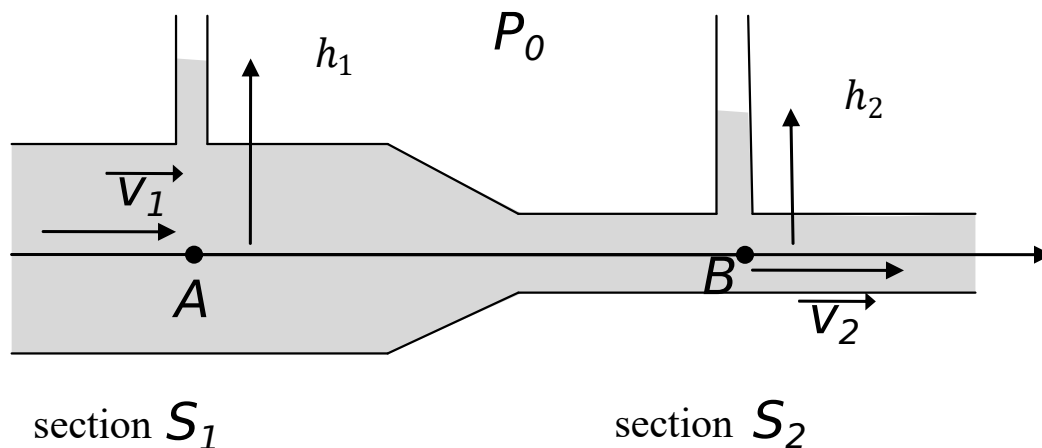


exo : Le fluide est parfait, incompressible et homogène. On note $h(t)$ la hauteur de fluide au dessus de l'ouverture en $z = 0$. On note $h_0 = h(t = 0)$. La section horizontale du réservoir est S , la section verticale de la petite ouverture est $s \ll S$.

1. Par conservation du débit, justifier que $h(t)$ varie lentement et qu'on peut considérer l'écoulement comme quasi-stationnaire.
2. Utiliser la relation de Bernoulli pour démontrer que $v_B = \sqrt{2gh}$. C'est la « formule de Torricelli ». Effectuer une analogie avec la vitesse atteinte par chute libre.
3. Montrer que la hauteur d'eau vérifie l'équation différentielle non-linéaire : $dh/dt = -(s/S)\sqrt{2gh}$.
4. En déduire que la durée de vidange est $\tau = \frac{S}{s}\sqrt{2h_0/g}$.
5. AN de τ : $S = 1 \text{ m}^2$, $s = 10 \text{ cm}^2$, $h_0 = 50 \text{ cm}$.

4.4 Exo-type : effet Venturi

Considérons l'écoulement stationnaire incompressible d'un fluide parfait homogène dans une conduite présentant un rétrécissement, cf figure. On place deux ouvertures verticales, la hauteur de fluide renseignant sur la pression sous cette ouverture. Expérimentalement, on observe que le fluide est plus bas dans les zones de faible section, et donc que la pression est plus faible dans les zones de haute vitesse. Ce phénomène est appelé « **effet Venturi** ».



1. Que donne la conservation du débit ?
2. Montrer que la pression est plus faible où la conduite se rétrécit.
3. On peut montrer que dans ces conditions, on peut appliquer la relation de la statique des fluides pour relier les pressions p_A et p_B respectivement à h_1 et h_2 . Donner ces relations.
4. En les reportant dans la relation de Bernoulli, démontrer que la mesure de différence de hauteur donne accès à une mesure de vitesse d'écoulement :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_1)}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}} \quad (9)$$

4.5 Applications de l'effet Venturi

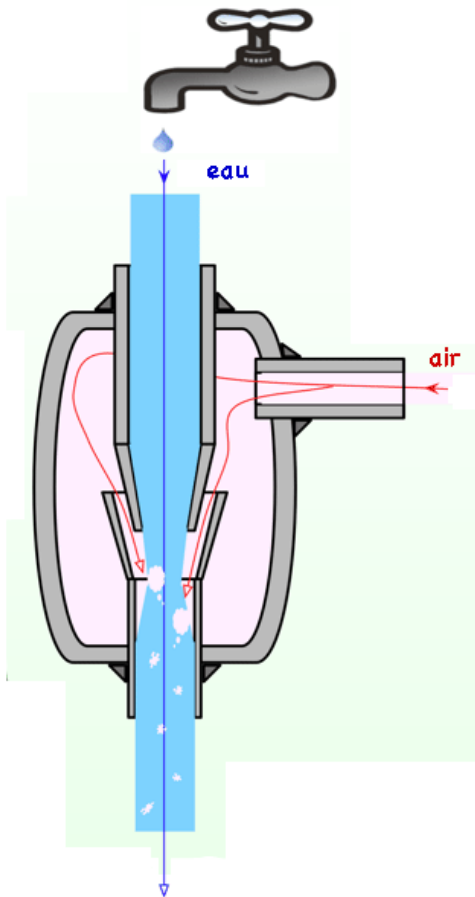


FIGURE 1 – Fonctionnement d'une trompe à eau.

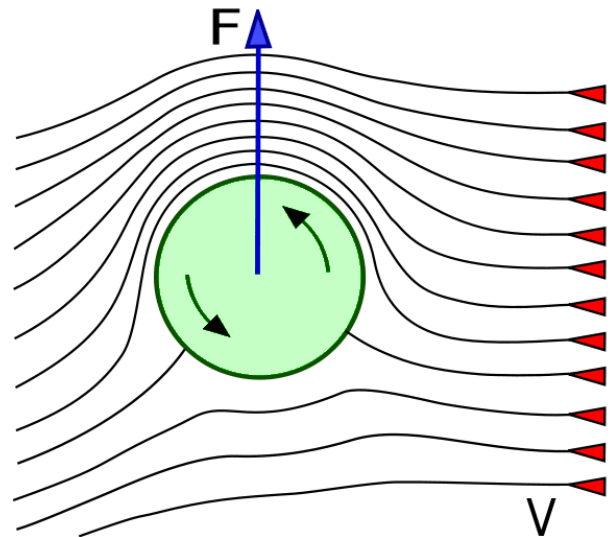


FIGURE 2 – Effet Magnus : force latérale sur une balle/ballon avec effet de rotation.

- ★ les pulvérisateurs de liquide (parfum, engrais, etc) fonctionnent sur le même principe que la trompe à eau,
- ★ la pression est plus faible entre deux immeubles proches,
- ★ soufflez entre deux feuilles de papier,
- ★ mesure de vitesse par tube de Pitot, cf exo suivant.

4.6 Application à mesure de vitesse par tube de Pitot



FIGURE 3 – Sonde Pitot sur Airbus A380. L'embouchure est à droite.

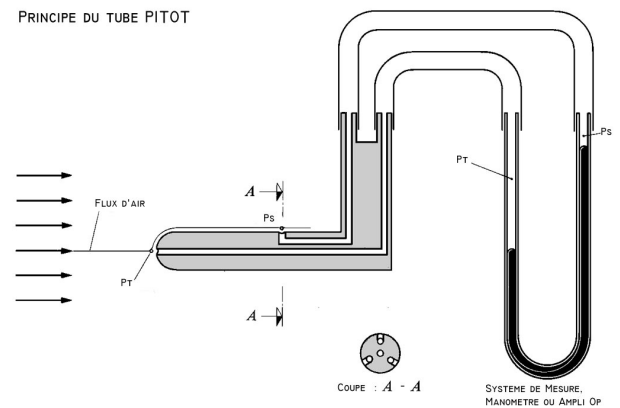


FIGURE 4 – Principe d'une sonde de Pitot.

exo : Montrer que la vitesse de l'écoulement v loin de la sonde vérifie :

$$v = \sqrt{\frac{2\mu_l g h}{\mu_{\text{air}}}} \quad (10)$$

avec μ_l la masse volumique du liquide, μ_{air} celle de l'air, h la différence de hauteur de liquide.