# TDMF3 : Équations dynamiques locales

### Savoirs

• Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.
• Notion d'écoulement parfait et de couche limite.
• Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.

### Savoir-faire

• Écoulement visqueux : connaître et utiliser l'équation de Navier-Stokes. *Exos 1.1, 1.2, 1.3 (et 1.4 par PFD).*
exos de cours : *écoulements de Couette plan et Poiseuille cylindrique.*

• Écoulement parfait : Démontrer, justifier et utiliser la relation de Bernoulli. *Exos 2.1, 2.2.*
démo de cours : *démonter les relations de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.*
exos de cours : *formule de Torricelli, effet Venturi, tube de Pitot.*

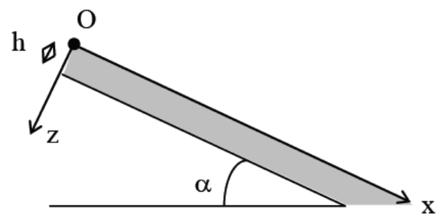
• Écoulement parfait : utiliser l'équation d'Euler. *Exos 2.3, 2.4.*
exos de cours : *oscillation dans tube en U.*

### Interro de cours

1. Donner l'équation de Navier-Stokes.
2. Donner la relation de Bernoulli dans la cas d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible d'un fluide homogène dans le champ $\overrightarrow{g}$ homogène.
3. Soit un champ scalaire $E(x, y, z, t)$ vérifiant l'équation $\dfrac{\partial E}{\partial y} = A \cdot y^2 + B \cdot x$ avec $A$ et $B$ constantes. En déduire l'expression générale de $E$ en précisant de quoi dépend la « constante d'intégration ».
4. Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait homogène dans une conduite horizontale. Si la section de la conduite se resserre, est-ce que la vitesse augmente ou diminue ? Et est-ce que la pression augmente ou diminue ?

# 1 Écoulements visqueux

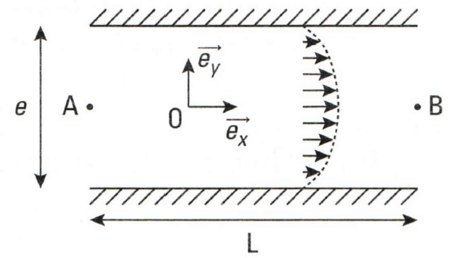
## 1.1 Écoulement sur un plan incliné




Une couche de liquide d'épaisseur $h$ constante s'écoule le long d'un plan incliné qui fait un angle $\alpha$ avec l'horizontale. Le liquide est incompressible de masse volumique $\rho$ et de viscosité dynamique $\eta$. L'écoulement est supposé stationnaire et unidimensionnel : $\overrightarrow{v}(x, z) = v(x, z)\overrightarrow{e_x}$ et s'étend sur une distance $L = 50$ cm $>> h$ selon $Oy$.

1. Montrer alors que $v$ ne dépend pas de $x$. Montrer que l'accélération d'une particule de fluide est nulle. Simplifier alors l'équation de Navier-Stokes.
2. Déterminer alors de champ de pression en supposant que la pression au niveau de la surface libre est égale à la pression atmosphérique.
3. Donner la condition aux limites sur la vitesse en $z = h$. De plus, on considère que l'air exerce une force surfacique tangentielle négligeable sur l'eau au niveau de la surface libre. En déduire une deuxième condition en $z = 0$.
4. Déterminer alors le profil des vitesses et le tracer.
5. Calculer le débit volumique et la vitesse moyenne de l'écoulement.
6. Application numérique pour une couche d'eau de 2 mm d'épaisseur sur un plan faisant un angle de 1° avec l'horizontale.

## 1.2 Écoulement de Poiseuille plan




On considère un fluide newtonien de viscosité $\eta$ qui s'écoule sur une distance $L$ entre deux plaques parallèles très grandes espacées de $e$. Le fluide est soumis à une différence de pression $\Delta p = p_A - p_B > 0$. L'écoulement est supposé incompressible, stationnaire et laminaire. On suppose le champ de vitesse sous la forme $\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{u_x}$ (cf exo précédent pour justification).

On choisit l'origine des $x$ en entrée de tuyau (donc $x_A = 0$), et l'origine des $y$ à mi-hauteur ($y_A = y_B = 0$).

1. À partir de l'équation de Navier-Stokes, déterminer les deux équations déterminant les champs de vitesse et pression.
2. En déduire que le champ de pression est $p(x,y) = p_A - \mu g y - \dfrac{\Delta p}{L}x$.
3. Démontrer que le profil du champ de vitesses est parabolique : $v(y) = \frac{\Delta p}{2L\eta}\left(\frac{e^2}{4} - y^2\right)$.
4. Considérons une portion de l'écoulement de profondeur $H$ dans la direction $z$. Exprimer le débit volumique $D_v$ à travers cette portion. Effectuer une analogie avec un autre domaine de la physique. On trouve $D_V = \frac{He^3}{12L\eta}\Delta p$.
5. Un robinet de jardin a été installé à 50 m de l'arrivée principale d'eau où la pression vaut 3 bar. Le tuyau de raccordement utilisé pour rejoindre le robinet de jardin a un diamètre intérieur standard de 1 cm. Le débit volumique souhaité est de $0,4$ L/s. La viscosité de l'eau est $10^{-3}$ Pa.s. Évaluer l'ordre de grandeur de la perte de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau.

## 1.3 Écoulement de Poiseuille cylindrique

Un fluide de viscosité dynamique $\eta$ et de masse volumique $\mu$ s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe $(Oz)$, de longueur $L$ et de rayon $R$. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme :

$$\overrightarrow{v}(M) = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$$

$$p(M) = p(r,z)$$

Le champ de vitesse de cet exercice vérifie en base cylindrique :
$\mathrm{div}\overrightarrow{v} = \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ et $\Delta\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_z}$

1. On suppose que l'écoulement est incompressible. Montrer que $v_z(r,z)$ ne dépend pas de $z$.

   On néglige la pesanteur et on rappelle l'équation de Navier-Stokes :

   $$\mu\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) + \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

   où $\overrightarrow{a} = \dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v}$ est l'accélération particulaire d'une particule de fluide.
2. Montrer que le champ des accélérations $\overrightarrow{a}(M)$ est nul.
3. Montrer que la pression $p$ ne dépend pas de $r$.
4. Établir l'équation différentielle dont est solution $v_z(r)$ et montrer que $\dfrac{dp}{dz}$ est une constante $C$. Expliciter $C$ en exploitant les conditions aux limites sur la paroi de la conduite. On note $p(z=0) = p_1$ à l'entrée et $p(z=L) = p_2$ à la sortie de la conduite.
5. Déterminer alors le champ $v_z(r)$. On admettra que $\dfrac{dv_z}{dr}$ est bornée.
6. En déduire l'expression du débit volumique $D_V$ en fonction des pressions $p_1$ et $p_2$.
7. Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique, introduire une résistance hydraulique $R_h$ et l'exprimer en fonction de $\eta$, $R$ et $L$. Comparer l'influence du rayon $R$ sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.

8. Estimer l'ordre de grandeur de la chute de pression dans une artère aorte, sur une longueur supposée de $L = 1$ m, à l'aide des données ci-dessous. Commenter sachant que le cœur maintient une différence de pression $\Delta p$ qui, symbolisée par "$12 - 8$" en médecine, vaut $\Delta p = 12 - 4 = 8$ centimètres de mercure (1 bar = 760 millimètres de mercure).

**Valeurs numériques**

Les valeurs correspondant à des grandeurs physiologiques peuvent différer de manière appréciable entre personnes : les valeurs données sont des moyennes.

| Type de vaisseau | Diamètre (en mm) | Nombre |
|---|---|---|
| artère aorte | 10 | 1 |
| grandes artères | 3 | 40 |
| branches principales | 1 | 600 |
| branches secondaires | 0,6 | 1800 |
| branches tertiaires | 0,14 | $7,6 \times 10^4$ |
| artères terminales | 0,05 | $10^6$ |
| branches terminales | 0,03 | $13 \times 10^6$ |
| artérioles | 0,02 | $4 \times 10^7$ |
| capillaires | 0,008 | $1,2 \times 10^9$ |

*Tableau 1.* Diamètre et nombre des différents types de vaisseaux de l'être humain.

| Espèce | Battements cardiaques par min | Rayon de l'aorte (cm) |
|---|---|---|
| Lapin | 200 | 0,17 |
| Chien | 125 | 0,4 |
| Homme | 60 | 0,5 |
| Bœuf | 40 | 2 |
| Souris m=30g | 700 | 0,04 |
| Eléphant m=2000kg | 40 | 4 |

*Tableau 2.* Fréquence cardiaque pour différentes espèces.

Masse volumique de l'eau : $\rho_0 = 10^3\ kg.m^{-3}$
Débit volumique cardiaque pour l'être humain : $Q = 4,5\ L.min^{-1}$
Viscosité cinématique du sang : $\nu = 3,8.10^{-6} m^2.s^{-1}$.

### 1.4 Sans utiliser Navier-Stokes

*Comme l'équation de Navier-Stokes découle du PFD appliqué à une particule de fluide, on peut très bien déterminer un champ de vitesse directement en effectuant le PFD sur un volume de fluide bien choisi sans utiliser Navier-Stokes.*

On considère un écoulement stationnaire et incompressible dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon $a$ (de type Poiseuille cylindrique). Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses de la forme : $\overrightarrow{v} = v_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$. Avec la géométrie proposée, on donne l'opérateur divergence $\text{div}\,(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ et l'opérateur gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$.

1. Montrer, en utilisant les hypothèses de travail, que $v_z$ ne dépend pas de $z$.

Le résultat précédent implique que le mouvement de toute particule de fluide est rectiligne et uniforme. Nous allons étudier le déplacement d'un système $\Sigma$ fermé mobile cylindrique de fluide de rayon $r < a$, de longueur $\ell$ selon l'axe $z$. On néglige l'effet du poids dans la canalisation horizontale. On supposera que le champ des pressions $p$ dans la canalisation est fonction uniquement de $z$.

2. Déterminer l'expression de la résultante $\overrightarrow{F_p}$ des forces de pression s'exerçant sur $\Sigma$.

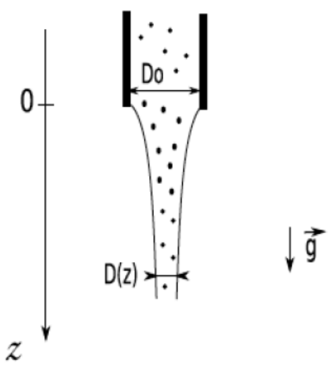
On donne la force tangentielle subie par chaque élément $dS$ de la paroi latérale de $\Sigma$ :

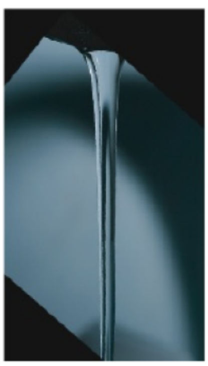
$$\overrightarrow{dF_t} = \eta \frac{dv_z(r)}{dr} dS\overrightarrow{u_z}$$

3. Déterminer l'expression de la résultante $\overrightarrow{F_t}$ des forces de viscosité s'exerçant sur $\Sigma$.
4. En déduire que $v_z(r) = \left(a^2 - r^2\right) \frac{p(z) - p(z+\ell)}{4\eta\ell}$.

## 2 Écoulements parfaits

### 2.1 Jet d'eau en sortie de robinet



On observe, lorsque le débit d'eau n'est pas trop important, que le diamètre d'un jet d'eau en sortie d'un robinet diminue lorsque la distance avec l'entrée du robinet augmente. L'objectif de l'exercice est d'expliquer ces observations.

La vitesse d'écoulement est supposée homogène sur toute la section du jet et parallèle à $\overrightarrow{u_z}$. La masse volumique du fluide est supposée constante en tout point de l'écoulement.

1. Établir une relation entre $v(z)$, $D(z)$, $v_0$ et $D_0$.
2. La viscosité et la tension de surface du fluide sont négligées. L'écoulement est supposé irrotationnel. Montrer que :
$$v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$$
3. En déduire l'expression de $D(z)$ en fonction de $D_0$ et $v_0$.

### 2.2 Clepsydre

Un récipient à symétrie de révolution autour de l'axe $Oz$ a sa section horizontale $S(z)$ qui varie, en fonction de la cote $z$, comptée à partir d'un orifice $O$ de très faible section $s$ percé au fond.

1. Exprimer l'équation différentielle donnant $dz/dt$, la variation de l'altitude de l'eau.
   On suppose que la variation de la section suit la loi :
$$S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$
2. En déduire le temps de vidange $T$ entre deux valeurs de la cote.
3. Pour quelle valeur de $n$ ce temps est-il proportionnel à la variation de niveau ?

### 2.3 Oscillations dans un tube en U

On considère un tube en U, à branches verticales de section uniforme $S$ et contenant un liquide non visqueux, incompressible de masse volumique uniforme $\rho$. On note $h(t) = z_B(t) - z_A(t)$ la différence de cote entre les deux surfaces du liquide dans les deux branches.

L'écoulement est décrit par un champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M,t) = v(s,t)\overrightarrow{T}$ uniforme dans une section du tube. Le vecteur $\overrightarrow{T}$ est un vecteur unitaire tangent au contour moyen orienté de $A$ vers $B$ ; $s$ est l'abscisse curviligne mesurée le long de la ligne de courant moyenne (on prend $s_A = 0$ et $s_B = L$). $SL$ est le volume total de fluide.

Le liquide est mis en mouvement. La pression atmosphérique est $P_0$.

1. Montrer que $v(s,t)$ ne dépend pas de $s$ et l'exprimer en fonction de $h(t)$.
2. Représenter une ligne de courant. Rappeler l'équation d'Euler.
3. En intégrant la projection de cette équation le long d'une ligne de courant joignant les deux surfaces libres, déterminer la période des oscillations.

### 2.4 Cyclone et écoulement tourbillonnaire

À l'intérieur d'un cylindre d'axe $Oz$, de rayon $R$, l'écoulement de l'air est homogène, parfait, permanent, incompressible et tourbillonnaire. On définit le vecteur tourbillon par $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{v})$. Dans le cylindre, il vaut $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u_z} =$ avec $\Omega$ une constante.

À l'extérieur du cylindre, l'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et irrotationnel. On note $p_0$ la pression loin du cylindre. On admet que les lignes de courant sont des cercles et que $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u_\theta}$. On néglige les effets de la pesanteur.

On rappelle que :
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

On donne l'expression suivante dans le cas de l'écoulement étudié : $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{u_r}$

1. Exprimer $v$ en fonction de $r$, $R$ et $\Omega$ par deux méthodes (intégration directe ou par théorème de Stokes).
2. Déterminer la pression $p(r)$ en négligeant les effets de la pesanteur. Tracer $p(r)$.