TDE1 : Sources du champ électromagnétique

Savoirs

• Densité volumique de charge, intensité, densité de courant. Équation de conservation de la charge. Loi des nœuds en régime stationnaire.
• Loi d'Ohm locale. Loi de Joule locale. Résistance d'un conducteur. Modèle phénoménologique de la conduction.
• Approche descriptive de l'effet Hall.

Savoir-faire

• Relier q, ρ, $\overrightarrow{j}$, I, n, $\overrightarrow{v}$. Calculer des charges totales Q_{int} et des courants enlacés pour des distributions éventuellement non uniformes *Exos 1, 2, 4.*
• Déterminer les invariances et symétries d'une distribution de charge ou de courant. *Exo 3.*
• Démo de l'équation de conservation de la charge dans le cas unidimensionnel.
• Établir un modèle phénoménologique de la conduction en introduisant une force opposée à la vitesse. En déduire une expression de la conductivité. Influence de la fréquence. *Exo de cours et exo 7 avec prise en compte de B directement.*
• En admettant les relations d'électrostatique ($\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ et/ou $\Delta V = 0$ en milieu neutre), établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme. *Exo de cours dans le cas filiforme, et exo 4 pour un courant radial.*
• Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique. *Démo de cours et exo 5.*
• Pour un conducteur parallélépipédique parcouru par un courant et soumis à un champ magnétique, relier qualitativement sens de I, de $\overrightarrow{B}$ et signe de la tension de Hall. *Exo 6.*

Interro

1. Donner la valeur de la constante fondamentale e.
2. Donner l'unité de la densité volumique de charge ρ. Donner l'expression de ρ pour un système comprenant plusieurs types de charges q_i à densité volumiques n_i.
3. Donner l'unité de la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$. Donner l'expression de $\overrightarrow{j}$ pour un système comprenant plusieurs types de charge à vitesses $\overrightarrow{v_i}$.
4. Donner l'équation de conservation de la charge dans le cas général. Dans quel cas donne-t-elle la loi des nœuds ?
5. Donner le volume élémentaire dV en coordonnées cylindriques et sphériques.
6. Donner la loi d'Ohm locale et la loi de Joule locale.
7. Donner la résistance électrique d'un conducteur filiforme.

1 Des distributions de charge différentes

1.1 Boule chargée (*)

Calculer la charge contenue dans une boule de rayon R et de densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$.

1.2 Bille radioactive (**)

Une bille radioactive initialement neutre de rayon $R \simeq 0$ émet de façon isotrope, à partir de la date $t = 0$, N particules par seconde de charge e, avec une vitesse de norme v_0. On note $\vec{j}(r,t) = j(r,t)\vec{u}_r$ le vecteur densité de courant volumique et $\rho(r,t)$ la densité volumique de charges en un point M à la distance $r = \text{OM}$ du centre O de la bille et à la date t.

a) Justifier l'existence, à la date t, d'un rayon critique $r_c(t)$ et l'exprimer.

b) Déterminer la charge $Q(t)$ de la bille à la date t.

c) En supposant que les particules se déplacent à une vitesse v_0 constante, Exprimer $j(r,t)$ et $\rho(r,t)$ pour $r < r_c(t)$.

d) Vérifier la conservation de la charge totale du système.

e) Pourquoi l'hypothèse de constance de la vitesse des particules est-elle discutable ?

2 Des courants très différents

2.1 Désintégration radioactive (*)

On considère une source ponctuelle de Cesium 137 radioactif β^- :

$$^{137}_{55}\text{Cs} \rightarrow ^{0}_{-1} e^- + ^{137}_{56}\text{Ba}^*$$

Cette source est située en O, centre d'un repère sphérique. Son activité (nombre de désintégrations par seconde) est $A = 0,185.10^6$ Bq. Le système est en régime permanent.

1. Quelle est l'intensité I qui traverse une sphère de centre O ? Application numérique.
2. Exprimer dans le repère sphérique la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$. Faire l'application numérique du module de cette densité volumique à 1 m de la source.

2.2 Courant dans un fil (**)

Soit un fil de cuivre cylindrique de section $S = 1$ mm^2 et parcouru par un courant $i = 10$ A. Sachant que le réseau métallique de cuivre peut être assimilé à un réseau d'ions fixes Cu^+ et à des électrons libres (un électron par atome), calculer :

1. le nombre d'électrons libres par unité de volume n^* ;
2. la vitesse d'ensemble v des charges mobiles.

Données :
— masse volumique du cuivre $\mu_{Cu} = 8,8.10^3$ kg.m^{-3} ;
— masse molaire du cuivre $M_{Cu} = 63,6$ g.mol^{-1} ;
— nombre d'Avogadro $N_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1} ;
— charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}$ C.

2.3 Foudre (**)

La durée d'un éclair est d'environ 25 milliseconde et son diamètre est d'environ 3 cm. En dessous des nuages orageux, il se forme un champ électrique d'environ 20 000 V/m. L'intensité moyenne d'un éclair est de 100A.

Lorsque la foudre tombe, quel est le nombre d'électrons allant du nuage vers le sol ?
Quelle conductivité électrique pourrait-on attribuer à l'air dans ces conditions ?
Quelle est l'ordre de grandeur de l'énergie dissipée lors d'un éclair ?

3 Exo-type : Invariances et symétries

1. (a) Déterminer les invariances de la distribution de charge dans le cas : d'une boule uniformément chargée, d'un cylindre infini uniformément chargé, d'un condensateur plan constitué de deux plaques infinies parallèles de densité surfacique σ et $-\sigma$.
   (b) Déterminer les plans de symétrie ou antisymétrie de la distribution de charge : d'une boule uniformément chargée, d'un cylindre infini de ρ uniforme, du condensateur plan constitué de deux plaques infinies parallèles de densité surfacique σ et $-\sigma$. Quels sont ceux passant par un point M quelconque ?
2. (a) Déterminer les invariances de la distribution de courant dans le cas : d'un fil infini parcouru par $\overrightarrow{j}$ homogène, d'une plaque infinie parcourue par $\overrightarrow{j}$ homogène.
   (b) Déterminer les plans de symétrie ou antisymétrie de la distribution de courant : d'un fil infini parcouru par $\overrightarrow{j}$ homogène, d'une plaque infinie parcourue par $\overrightarrow{j}$ homogène, d'une spire circulaire, d'une bobine finie, d'un solénoïde infini. Quels sont ceux passant par un point M quelconque ?

4 Résistance électrique radiale d'une portion de cylindre (**)

Considérons une gaine cylindrique métallique solide de longueur L, rayon intérieur R_1 et rayon extérieur R_2, de conductivité électrique σ. Elle est soumise à un potentiel V_1 sur la face intérieure, et V_2 à l'extérieur, le courant va donc circuler radialement et non le long de l'axe du cylindre. On admet qu'ici $\Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$ et $\overrightarrow{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r}$ (cf chapitre suivant). Démontrer que la résistance électrique définie de manière générale par $R = \dfrac{V_1 - V_2}{I}$ vaut ici $R = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma L}$.

5 Bilan Joule pour un courant non uniforme (**)

Considérons un conducteur ohmique de conductivité $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ occupant le demi-espace $z \geq 0$. Soumis à champ électrique extérieur sinusoïdal, un champ électrique non uniforme se développe dans le conducteur (cf chapitre *PO2-Dispersion et absorption*) :

$$\overrightarrow{E}(x, y, z, t) = E_0\overrightarrow{u_x}\exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)$$

avec $\delta > 0$. On considère un portion de ce conducteur comprise entre 0 et a selon x et y, et infinie selon z.

1. Sans faire de calcul, donner la moyenne dans le temps de l'intensité dans le conducteur.
2. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule.

6 Effet Hall dans un semi-conducteur (**)

On considère un barreau de grande longueur selon Ox avec une section droite rectangulaire de dimensions a selon Oy et b selon Oz. Ce barreau est constitué d'un matériau semi-conducteur tel que dans le cas d'un dopage p, la conduction est dominée par des charges mobiles positives $q > 0$, alors que dans le cas d'un dopage n, la conduction est dominée par des charges mobiles négatives $q < 0$.

Ce barreau est parcouru par un courant I tel qu'en tout point du barreau $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_x}$. Ce courant correspond à déplacement de n porteurs de charge q par unité de volume ayant chacun une vitesse $\overrightarrow{v}$. Ce barreau est placé dans une zone de champ $\overrightarrow{B} = B_0.\overrightarrow{e_z}$. On ne s'intéresse qu'au régime permanent établi.

1. Qualitativement, placer sur un schéma les forces appliquées aux porteurs de charge en régime permanent dans le cas d'un dopage p. En déduire où s'accumulent les charges et le signe de la tension transverse de Hall. Faire de même pour un dopage n.
2. Déterminer le champ de Hall $\overrightarrow{E_H} = E_H\overrightarrow{e_y}$ et en déduire l'expression de la tension de Hall entre deux faces identifiées du barreau (on admet que $V_H = -aE_H$ ici).

Le capteur d'une sonde à effet Hall est composé d'une pastille semi-conductrice de largeur $a = 1$ mm et de hauteur $b = 0,1$ mm composée d'antimoniure d'indium (InSb) dans laquelle circule un courant d'intensité $I = 1$ A. La densité volumique des porteurs de charge y est d'environ $n = 10^{22}$ m^{-3} contre 10^{29} m^{-3} pour le cuivre.

3. Discuter avec des critères quantitatifs de l'intérêt de ne pas utiliser de métal dans une sonde à effet Hall. Et pourquoi prendre b si petit ?

7 Généralisation de la conduction (***)

Dans un métal, on traduit en moyenne les collisions entre électrons de conduction (charge -e, masse m, densité n^*) et ions du réseau par une force de frottement fluide de la forme :

$$\overrightarrow{f_d} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse moyenne des électrons et τ est homogène à un temps.
Un point O du milieu métallique sert d'origine au repère $(Oxyz)$ du référentiel galiléen d'étude. On superpose les actions des champs uniformes et permanents $\overrightarrow{E}\,(E_x, E_y, E_z)$ et $\overrightarrow{B}\,(0, 0, B)$ sur les électrons de conduction. On se place en régime permanent.

1. En appliquant le PFD en régime permanent, montrer qu'on obtient l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

   où (j_x, j_y, j_z) est le vecteur densité de courant. Donner les expressions de σ et α.

2. Dans le cas d'un milieu d'axe de symétrie (Ox) dans lequel la composante du vecteur $\overrightarrow{j}$ dans le plan (Oxy) est uniforme et colinéaire à (Ox), déterminer la conductivité longitudinale $\sigma_{//} = \dfrac{j_x}{E_x}$ et le coefficient de Hall $R_H = \dfrac{E_y}{j_x B}$.