MF4 : Bilans macroscopiques

Les écoulements à travers des turbines, hélices ou autres machines sont souvient sièges de turbulences, ce qui rend leur modélisation difficile voire impossible. Mais effectuer un bilan entre l'entrée et la sortie d'une machine donne accès facilement aux échanges d'énergie et aux forces appliquées par l'écoulement, même sans connaître le détails de celui-ci !

ATTENTION : **Utiliser avec précaution la relation de Bernoulli**, cette relation n'est pas valable pour une ligne de courant interrompue par un élément de machine : hélice, pompe, etc.

FIGURE 1 – Modèle Enercon E66. Hauteur : 100 m, puissance : 2 MW (parc d'Assigny).

FIGURE 2 – Un *water jet-pack* utilisé par la société *aquaticaviation*

L'enjeu de ce chapitre est d'effectuer des bilans sur des systèmes ouverts macroscopiques englobant les zones compliquées (tuyaux courbes, hélices, etc). Ceci rappelle le principe d'étude des machines thermiques avec écoulement du chapitre T1.

1 Bilans de masse

1.1 Rappel : débit de masse et de volume

def : Le **débit massique** D_m à travers une surface S orientée est la quantité de masse traversant S par unité de temps. C'est une grandeur algébrique : positive si de la masse passe dans le sens de $\overrightarrow{dS}$, négative sinon. $\boxed{D_m = \dfrac{\delta m}{dt}}$.

Unité : kg.s^{-1}.

prop : Le débit massique d'un écoulement est le flux du champ $(\mu\overrightarrow{v})$: $\boxed{D_m = \displaystyle\iint_{M\in S} \mu(M).\overrightarrow{v}(M).\overrightarrow{dS}}$.

Dans le cas d'un champ $\mu\overrightarrow{v}$ uniforme sur une surface S plane : $D_m = \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{S}$.

prop : En régime stationnaire, le débit massique se conserve au cours de l'écoulement.

def : Le **débit volumique** D_v à travers une surface S orientée est la quantité de volume traversant S par unité de temps. C'est une grandeur algébrique : positive si du volume passe dans le sens de $\overrightarrow{dS}$, négative sinon. $\boxed{D_v = \dfrac{\delta V}{dt}}$.

Unité m^3.s^{-1}.

prop : Le débit volumique d'un écoulement est le flux du champ $\overrightarrow{v}$: $\boxed{D_v = \iint_{M \in S} \overrightarrow{v}(M).\overrightarrow{dS}}$.

Dans le cas d'un champ $\overrightarrow{v}$ uniforme sur une surface S plane : $D_v = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{S}$.

prop : En écoulement incompressible, le débit volumique se conserve au cours de l'écoulement.

prop : Dans le cas d'une masse volumique uniforme, la relation entre débit massique et volumique est simple : $\boxed{D_m = \mu.D_v}$.

1.2 Deux manières d'effectuer un bilan de masse

Considérons [1] une portion macroscopique d'un écoulement unidimensionnel à une entrée et une sortie. Au niveau de l'entrée : vitesse v_e, masse volumique μ_e, section S_e, débit massique $D_{me} = \mu_e v_e S_e$. Au niveau de la sortie : vitesse v_s, masse volumique μ_s, section S_s, débit massique $D_{ms} = \mu_s v_s S_s$.

1.2.1 Bilan de masse pour un système ouvert fixe

schéma : *Étude sur le système macroscopique Σ^* ouvert fixe.*

principe du bilan sur système ouvert : exprimer la variation de masse dm^* du système ouvert pendant une durée dt en fonction des débits entrants et sortants.

- ⋆ *exprimer la masse entrante pendant dt :* $\delta m_e =$
- ⋆ *exprimer la masse sortante pendant dt :* $\delta m_s =$
- ⋆ *en déduire la variation de masse pendant dt :* $dm^* =$
- ⋆ *on obtient :*

$$\boxed{\text{pour } \Sigma^* \text{ ouvert :} \qquad \frac{dm^*}{dt} = D_{me} - D_{ms}} \tag{1}$$

1.2.2 Bilan de masse pour un système fermé mobile

schéma : *Étude sur le système macroscopique Σ fermé mobile.*

principe du bilan sur système fermé : exprimer la conservation de la masse du système fermé pendant une durée dt.

- ⋆ *exprimer la masse à t :* $m(t) =$
- ⋆ *exprimer la masse à* $t + dt$ *:* $m(t + dt) =$
- ⋆ *appliquer la conservation de la masse :*
- ⋆ *on obtient :*

$$\boxed{\text{pour } \Sigma^* \text{ ouvert :} \qquad \frac{dm^*}{dt} = D_{me} - D_{ms}} \tag{2}$$

1.3 Bilan de masse en régime stationnaire

prop : En régime stationnaire : $\boxed{D_{me} = D_{ms}}$. Relation qui se généralise en cas de plusieurs entrées ou sorties (loi des nœuds).

1. CE : Établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe ou sur un système fermé et mobile. Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan.

2 Bilan de quantité de mouvement

Contrairement à la masse, la quantité de mouvement[2] d'un système ne se conserve pas toujours. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à un système fermé pendant dt, sa variation de quantité de mouvement est :

$$\boxed{\overrightarrow{dp} = \overrightarrow{p}(t+dt) - \overrightarrow{p}(t) = \sum \overrightarrow{F}dt} \tag{3}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la résultante des forces appliquée au système fermé.
rq : ATTENTION, ne pas oublier les forces de pressions de chaque côté !

Dans le cadre du programme, on étudie un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie.

2.1 Force subie par un écoulement

prop : Pour un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie, un bilan de quantité de mouvement donne la résultante des forces $\sum \overrightarrow{F}$ subie par le fluide :

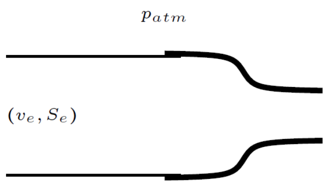
$$D_m \left(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}\right) = \sum \overrightarrow{F} \tag{4}$$

bilan de quantité de mouvement : ***Démo de la formule à refaire à chaque exercice.***

2.2 Applications qualitatives

1. *On remplit un récipient immobile par le dessus. Quel est le sens de la force appliquée par le fluide sur le récipient ?*
2. *Lors d'un tir de pistolet à eau, quelle est l'action de l'écoulement sur le pistolet ?*

2.3 Exo-type 1D : force exercée sur un embout



Une conduite de section S_e est terminée par un embout en caoutchouc de section en sortie $S_s < S_e$. On note $\alpha = \dfrac{S_e}{S_s}$ On considère l'écoulement parfait, irrotationnel en régime permanent avec un débit D_m

exo : *L'objectif est de déterminer la force exercée par l'écoulement sur un embout de tuyau.*

1. *Qualitativement, quel est le sens de cette force ?*
2. *Déterminer l'expression de la pression p_e de l'eau dans la conduite en fonction du débit massique D_m, p_{atm}, μ, S_e et α.*
3. *Par un bilan de quantité de mouvement sur un système bien choisi, déterminer la composante horizontale de la force exercée par l'eau sur l'embout :*

$$F = p_{atm} S_e \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{D_m^2}{2\mu S_e}(\alpha - 1)^2 \tag{5}$$

2.4 Exo-type 2D : force exercée sur un tuyau coudé

Considérons un écoulement dans un tuyau de section S formant un angle droit. L'écoulement est stationnaire, incompressible, parfait, de masse volumique μ et débit D_m. On néglige la pesanteur.

Les pressions en entrée et sortie valent respectivement p_1 et p_2. Les vitesse sont $\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v_2} = v_2\overrightarrow{u_y}$.

L'objectif est d'exprimer la force appliquée par l'écoulement sur le tuyau $\overrightarrow{F}_{e\to t}$.

2. CE : Utiliser la loi de la quantité de mouvement pour exploiter un bilan

1. *Faire un schéma. Qualitativement, à quoi s'attendre pour la direction et le sens de $\overrightarrow{F}_{e \to t}$?*
2. *Que déduire de la conservation du débit massique en régime stationnaire ?*
3. *Que déduire de la relation de Bernoulli ?*
4. *Quelles sont les forces appliquées à un système fermé de fluide comprenant le coude ?*
5. *En déduire la force appliquée par l'écoulement sur le tuyau.*

3 Bilan d'énergie cinétique

Comme la quantité de mouvement, l'énergie cinétique [3] d'un système ne se conserve pas toujours. D'après la loi de la puissance cinétique appliquée à un système fermé pendant dt, sa variation d'énergie cinétique est :

$$dE_c = E_c(t+dt) - E_c(t) = \left(\sum \mathcal{P}_{int} + \sum \mathcal{P}_{ext}\right) dt \tag{6}$$

où $\sum \mathcal{P}_{int}$ est la puissance des forces intérieure au système, et $\sum \mathcal{P}_{ext}$ la puissance des forces extérieures.

Dans le cadre du programme, on étudie un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie.

prop : Pour un écoulement parfait incompressible, $\sum \mathcal{P}_{int} = 0$. On néglige la viscosité et la diffusion.

3.1 Puissance reçue par un écoulement

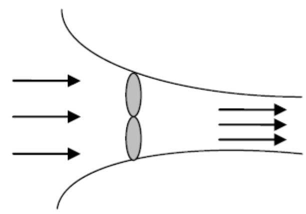
prop : Pour un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie, un bilan d'énergie cinétique donne :

$$D_m \left(\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2}\right) = \sum \mathcal{P}_{ext} \tag{7}$$

bilan d'énergie cinétique : ***Démo de la formule à refaire à chaque exercice.***

3.2 Exo-type : bilan d'énergie cinétique d'un ventilateur

On dispose d'un ventilateur de section variable dont le diamètre d'entrée est d_e et le diamètre de sortie est d_s. L'air, qui est assimilé à un fluide parfait incompressible, de masse volumique μ, rentre dans le ventilateur avec une vitesse v_e et ressort avec une vitesse $v_s \gg v_e$. La pression extérieur est uniforme et égale à la pression atmosphérique p_0. On note d le diamètre de l'hélice. Le tube de courant passant par l'hélice est dessiné sur la figure.



1. *Montrer que le champ des vitesses est continu au niveau de l'hélice. On notera v la vitesse au niveau de l'hélice.*
2. *Déterminer la discontinuité Δp du champ de pression de part et d'autre de l'hélice.*
3. *En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le fluide proche de l'hélice, exprimer la force de l'hélice sur le fluide en fonction de μ, v_s, v_e et d.*
4. *En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur une large portion de l'écoulement, exprimer la force de l'hélice sur le fluide en fonction de μ, v_s, v_e, v et d.*
5. *En déduire que $v = (v_e + v_s)/2$ et la puissance fournie au fluide :*

$$\mathcal{P} = \frac{\mu \pi d^2}{16} (v_s - v_e)(v_s + v_e)^2 \tag{8}$$

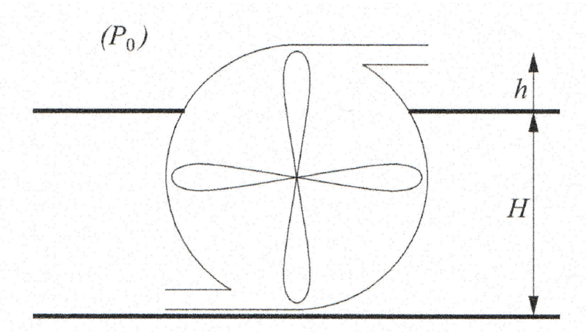
6. *En effectuant un bilan d'énergie sur une large portion de l'écoulement, retrouver la même expression de la puissance fournie au fluide.*

3. CE : Utiliser la loi de l'énergie cinétique pour exploiter un bilan. Exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible.

4 Ouverture : exemple de bilan d'énergie mécanique

Au programme officiel : bilans de quantité de mouvement et d'énergie cinétique seulement. Sans difficulté supplémentaire, on pourrait élargir le contenu à la notion de bilan d'énergie mécanique.

Une pompe permet de remonter de l'eau depuis le fond d'un lac de profondeur H jusqu'à l'altitude h au dessus de la surface. Le fluide est parfait incompressible de masse volumique μ. Le débit massique est D_0. Les sections d'entrée et de sortie de la pompe valent S_0.

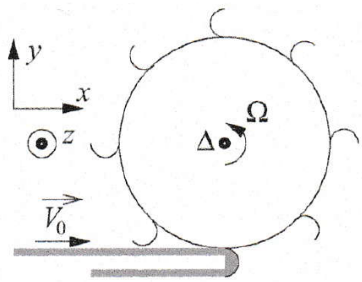


Quel est le lien entre vitesses d'entrée et de sortie ? Appliquer la loi de la puissance mécanique à un système fermé bien choisi pendant dt. En déduire que la puissance fournie par la pompe est $\mathcal{P} = D_0 gh$.

5 Ouverture moins facile : exemple de bilan de moment cinétique

Au programme officiel : bilans de quantité de mouvement et d'énergie cinétique seulement. Avec un énoncé bien guidé, on pourrait élargir le contenu à la notion de bilan de moment cinétique.

Une turbine Pelton est assimilée à un cylindre de rayon R en rotation autour de son axe horizontal Δ. Son moment d'inertie est J_Δ, on étudie son mouvement en régime stationnaire à vitesse angulaire Ω constante. Elle met en rotation un alternateur qui exerce sur elle en retour un couple équivalent à un couple de frottement de moment $M_\Delta = -\Gamma < 0$. Un jet d'eau incident à vitesse $\overrightarrow{V_0} = V_0\overrightarrow{u_x}$ horizontal frappe un auget à la base de la turbine. La forme de l'auget lui permet de renvoyer l'eau horizontalement dans l'autre sens. Le jet d'eau reste de section s constante, on suppose l'écoulement parfait, incompressible. Les effets de pesanteur sont négligés.



1. *Dans le référentiel de l'auget, exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_e}$ du fluide incident et $\overrightarrow{V_s}$ du fluide émergent en négligeant la variation de hauteur.*
2. *On étudie le système ouvert { turbine + eau dans l'auget }. Effectuer un bilan de moment cinétique pour montrer que $\Gamma = 2\mu Rs(V_0 - R\Omega)^2$.*
3. *En déduire la puissance reçue par la turbine de la part de l'écoulement. Pour quelle valeur de Ω sa valeur est-elle maximale ?*